

# Математическое моделирование влияния квантовых шумов на точность реализации квантовых алгоритмов

Ю.И. Богданов<sup>1,2,3</sup>, Н.А. Богданова<sup>2</sup>, В.Ф. Лукичев<sup>1</sup>, А.А. Орликовский<sup>1</sup>, И.А. Семенихин<sup>1</sup>,  
А.С. Холево<sup>4</sup>, А.Ю. Чернявский<sup>1,5</sup>

<sup>1</sup>Физико-технологический институт РАН, Нахимовский пр., 36/1, Москва, Россия

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет «МИЭТ», Москва, Россия

<sup>3</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия

<sup>4</sup>Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

<sup>5</sup>МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия

bogdanov@ftian.ru

**Аннотация.** Квантовая информатика представляет собой молодую и быстро развивающуюся область науки. Одним из наиболее перспективных направлений этой области являются квантовые компьютеры, представляющие собой принципиально новый тип высокопроизводительных устройств, которые позволят решать некоторые важные задачи, недоступные классическим компьютерам. На пути создания полномасштабного квантового компьютера лежит множество научных и технологических препятствий, для преодоления которых необходима развитая техника моделирования. Фундаментальной трудностью моделирования квантовых схем является экспоненциальный рост размерности задачи в зависимости от числа квантовых битов (кубитов). Это свойство естественным образом приводит к использованию параллельных высокопроизводительных вычислений. В работе рассмотрено моделирование квантового преобразования Фурье, а также алгоритма Гровера. Приведено описание формализма квантовых вычислений и основных приемов и трудностей моделирования. Приведены результаты моделирования многокубитных систем с учетом квантовых шумов.

## Ключевые слова

Квантовые вычисления, кубит, квантовый алгоритм, моделирование, параллельные вычисления, высокопроизводительные системы

## 1 Введение

Важной чертой последних десятилетий является бурный рост информационных технологий. Такой рост связан с непрерывной миниатюризацией элементной базы вычислительных систем, а численной его характеристикой является хорошо известный закон Мура. В последние годы прогресс в данной области связан не только с увеличением числа транзисторов, но и с изменением архитектуры самих устройств. Один из главных способов такой модификации - объединение нескольких вычислительных устройств в одно, начиная с уровня ядер и заканчивая связью между удаленными машинами по сети. Использование подобных подходов легко объяснимо: вычислительные элементы, очевидно, невозможно уменьшать до бесконечности, и предел, связанный с квантово-механической природой нашего мира, уже не за горами. Параллельное наращивание мощностей не является единственным возможным решением: одна из альтернатив - построение вычислительных систем на новых принципах. Примером именно такого подхода и являются квантовые вычисления.

В настоящее время активно обсуждаются десятки различных моделей квантовых компьютеров. В числе наиболее перспективных и интересных предложений по реализации квантовых регистров - проекты на ионах в ловушках, на ядерных спинах, на квантовых точках, на фотонах, на зарядовых, потоковых и фазовых состояниях в сверхпроводниковых структурах, на состояниях ридберговских атомов, на квантовых состояниях вакансионных центров в алмазе и др. [1, 2, 3, 4]. Основное достижение проведенных до сих пор исследований состоит в практической демонстрации справедливости физических принципов, лежащих в основе идеи квантовых вычислений. Основное пре-

пятствие на пути реализации концепции полномасштабных квантовых компьютеров - это декогерентизация квантовых состояний, обусловленная квантовыми шумами. Достигнутая в настоящее время в экспериментах точность реализации, характеризуемая вероятностью совпадения между теоретическим и экспериментальным квантовыми состояниями, составляет всего 60-80%, в то время как требуемая точность должна быть 99.99% и более. Одно из наиболее узких мест в развитии квантовых информационных технологий связано с отсутствием должной методологии контроля квантовых состояний и процессов. Такая, основанная на квантовых измерениях, методология призвана обеспечить интерфейс между разработкой элементной базы квантовых компьютеров и её практическим воплощением. С математической точки зрения, в основе такой методологии лежит количественная статистическая теория квантовых операций и измерений, основанная на использовании вероятностных операторно-значных мер (разложений единицы) и вполне положительных отображений операторных алгебр в гильбертовом пространстве [5, 6]. С технологической точки зрения, на базе рассматриваемой математической теории должны быть разработаны методы, алгоритмы и компьютерные программы, которые были бы способны обеспечить адекватную и полную оценку качества и эффективности конкретных квантовых информационных систем [7, 8]. С целью существенного повышения уровня исследований в рассматриваемой области в Физико-технологическом институте РАН совместно с Московским государственным университетом им. М.В. Ломоносова и Математическим институтом им. В.А. Стеклова РАН разработана новая методология оценивания качества и эффективности квантовых информационных технологий, основанная на анализе полноты, адекватности и точности реализации квантовых вентилях. Методы численного анализа и статистического моделирования с учётом влияния квантовых шумом, а также результатов технологических и экспериментальных исследований позволяют дать исчерпывающую оценку качеству и эффективности проектируемых квантовых регистров, сформулировать требования к экспериментальному оборудованию и технологии, посредством обратной связи развитый подход позволяет наилучшим образом распорядиться имеющимися ресурсами для оптимизации процесса разработки квантовых информационных технологий. Эффективность предложенного подхода уже была продемонстрирована нами в течении последних нескольких лет в работах с оптическими и сверхпроводниковыми кубитами [7, 8, 9, 10]. Целью настоящей работы является оценка влияния квантовых шумов на точность реализации квантовых алгоритмов в системах высокой размерности. Последовательное изложение общих методов и алгоритмов математического моделирования квантовых операций для задач создания элементной базы квантовых компьютеров изложено в наших работах [11, 12, 13]. Ниже мы ограничимся результатами численного анализа в приложении к двум важным алгоритмам квантовой информатики (квантовое преобразование Фурье и алгоритм Гровера). Акцент будет сделан на квантовых системах высокой размерности, которые доступны для моделирования на персональных компьютерах, а также на суперкомпьютере МВС-100К РАН.

## 2 Математический формализм квантовых алгоритмов

Более полное описание формализма квантовых вычислений можно найти, например, в книгах [3, 14]. Состояние одного кубита квантового компьютера задается вектором двумерного комплексного пространства единичной нормы:

$$a|0\rangle + b|1\rangle, |a|^2 + |b|^2 = 1,$$

где через вектора  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  обозначаются базисные векторы рассматриваемого пространства. Состояние  $n$ -кубитной квантовой системы лежит в тензорном произведении однокубитных пространств

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} = \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2}_n,$$

а соответствующие векторы имеют вид

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^1 c_{i_1, i_2, \dots, i_n} |i_1 i_2 \dots i_n\rangle. \quad (1)$$

Индекс  $i_1 i_2 \dots i_n$  является двоичным представлением обычного линейного индекса.

Квантовое вычисление представляет собой последовательное применение унитарных преобразований, причем преобразования действуют обычно лишь на несколько кубитов (чаще всего один или два). Преобразование одного кубита означает, что на остальные кубиты действует тождественное преобразование  $I$ , т.е. если на  $k$ -й кубит действует матрица  $U = \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} \\ u_{10} & u_{11} \end{pmatrix}$  размера  $2 \times 2$ , то на весь вектор действует матрица  $I_{2^{k-1}} \otimes U \otimes I_{2^{n-k}}$  размера  $2^n \times 2^n$ .

Рассмотрим однокубитное преобразование более подробно. Пусть начальный вектор  $|\psi\rangle$  с коэффициентами  $c_{i_1 i_2 \dots i_n}$  переходит в  $|\psi'\rangle$  с коэффициентами  $c'_{i_1 i_2 \dots i_n}$ . Тогда

$$c'_{i_1 i_2 \dots i_n} = u_{i_k 0} c_{i_1 i_2 \dots 0_k \dots i_n} + u_{i_k 1} c_{i_1 i_2 \dots 1_k \dots i_n}. \quad (2)$$

Формула легко распространяется и на случай операций над несколькими кубитами.

Соотношение (2) и его многокубитные аналоги важны с вычислительной точки зрения. Мы видим, что даже при однокубитной операции в векторе меняются все  $2^n$  компонент. Одна квантовая операция сводится к  $2^n$  классическим сложениям и  $2^{n+1}$  умножениям. Кроме того, легко заметить, что в зависимости от затронутого кубита любой новый коэффициент может зависеть от произвольного элемента исходного вектора, что очень сильно затрудняет моделирование квантовых операций на распределенных системах.

Квантовый алгоритм, как правило, представляет собой последовательное применение одно-, двух- и реже трехкубитных операций. Причем входные данные задаются именно выбором этой последовательности. Важно отметить, что как и в классическом случае, существуют универсальные наборы вентилей (гейтов): при помощи такого набора можно реализовать произвольную квантовую схему. Универсальным, например, является гейт CNOT в совокупности со всеми однокубитными операциями. Можно предложить и конечный универсальный набор, однако тогда мы получим не точную схему, а ее аппроксимацию с произвольной заданной точностью. После окончания работы алгоритма производится квантовое измерение, дающее для состояний вида (1)  $n$ -битный ответ  $i_1 i_2 \dots i_n$  с вероятностью  $|c_{i_1 i_2 \dots i_n}|^2$ . Таким образом квантовый алгоритм является вероятностным по своей природе. Цель эффективного квантового алгоритма - увеличить вероятность правильного ответа. Последовательность квантовых операций, которую и представляет из себя алгоритм, удобно представлять графически в виде так называемых квантовых схем, примером такой схемы служит рис. 1 (схема квантового преобразования Фурье).

## 2.1 Возможности моделирования

Несмотря на то, что преобразования типа (2) имеет простой вид, моделирование квантовых систем несет в себе серьезные трудности. Первая и главная трудность - экспоненциальный рост размерности. Так для моделирования всего лишь 50 кубитов необходимо работать с векторами из  $2^{50}$  комплексных чисел; при использовании чисел с одинарной точностью для хранения такого вектора потребуется 18, 014, 398, 509, 481, 984 байт.

На современных персональных компьютерах, используя оперативную память, можно моделировать примерно 30 кубитов. Так, в работе [15] реализовано моделирование схем с 32 кубитами при 16Gb оперативной памяти. Использование суперкомпьютеров позволяет увеличить число моделируемых кубитов примерно до 40. Так, в Германии на суперкомпьютере Jugene [16] проведена симуляция работы 42-кубитного квантового компьютера, а в России на суперкомпьютере «Ломоносов» реализованы 39 кубитов [17]. В работе [18] представлено моделирование 37-кубитных схем со скоростью одна квантовая операция за 10 сек. Также известна библиотека QCMPi [19], способная моделировать некоторые квантовые гейты и схемы на кластере. Библиотека основана на технологии MPI.

Как говорилось выше, операции типа (2) неудобны с точки зрения распределенной памяти, что требует серьезной оптимизации и использования современных технологий программирования.

## 3 Моделирование квантовых алгоритмов.

### 3.1 Алгоритм Шора и квантовое преобразование Фурье

Квантовое преобразование Фурье является квантовым аналогом дискретного преобразования Фурье. Оно играет ключевую роль в алгоритме Шора [20], который позволяет разложить число на простые множители экспоненциально быстрее, нежели известные классические аналоги. Так наилучший классический алгоритм решает эту задачу за время порядка  $O(\exp((64/9)^{1/3} n^{1/3} (\ln(n))^{2/3}))$ , в то время, как алгоритм Шора решает эту задачу за  $O(n^2 \ln(n) \ln(\ln(n)))$  (здесь  $n$  - двоичная длина раскладываемого числа). Для лучшей наглядности примерные оценки времени в зависимости десятичной длины раскладываемого числа приведены в таблице 1.

Помимо алгоритма Шора квантовое преобразование Фурье играет ключевую роль в еще одном важнейшем классе квантовых алгоритмов, а именно в алгоритмах моделирования квантовых систем [21].

Опишем само преобразование. На базисных состояниях оно действует следующим образом:

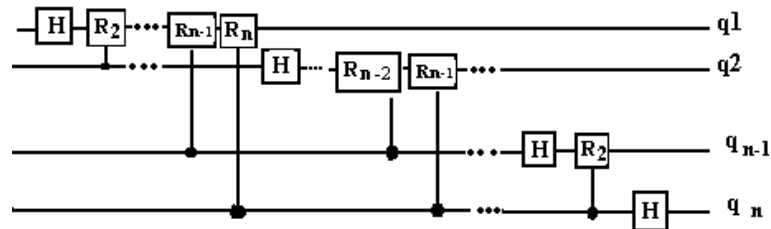
$$|j\rangle \xrightarrow{QFT} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{i2\pi jk}{N}\right) |k\rangle,$$

**Таблица 1.** Оценки времени разложения числа на простые множители на квантовом и классическом компьютере (Cray Titan, 20ПФлопс) против квантового компьютера с частотой 1 МГц.

Число десятичных знаков $k$	$k = 250$	$k = 500$	$k = 1000$
Трудоемкость классического алгоритма	1 год	250 млн. лет	$2 \cdot 10^{19}$ лет
Трудоемкость квантового алгоритма	4 сек.	18 сек.	84сек.

где  $N = 2^n$ ,  $n$  – число кубитов.

Отсюда несложно получить, что на амплитудах состояния производится стандартное дискретное преобразование Фурье. Такое преобразование можно реализовать квантовой схемой (рис. 1), требующей всего лишь  $O(\log^2(N))$  шагов, в то время как классическое быстрое преобразование Фурье требует  $O(N \log N)$ .



**Рис. 1.** Схема квантового преобразования Фурье.

В представленной схеме  $H = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  – преобразование Адамара,  $R_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(\frac{2\pi i}{2^k}) \end{pmatrix}$  – поворот фазы. Этот поворот осуществляется на управляемом кубите при условии, что управляющий находится в состоянии  $|1\rangle$  (управляющий кубит на схеме обозначается жирной точкой, связь между кубитами указывается соответствующей линией).

### 3.2 Зашумление квантовых гейтов

В работе было проведено моделирование не только идеальных, но зашумленных квантовых алгоритмов. Для гейтов были выбраны следующие модели шума:

- Зашумленный гейт Адамара:

$$H_e = HU(\theta), U(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta = e \cdot \xi, \xi \sim N(0, 1).$$

Здесь  $e$  - уровень ошибки,  $N(0, 1)$  – нормальная случайная величина с нулевым средним и единичной дисперсией.

- Зашумленное фазовое преобразование  $R_{ke} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(\frac{2\pi i}{2^k} + e \cdot \xi) \end{pmatrix}$ .

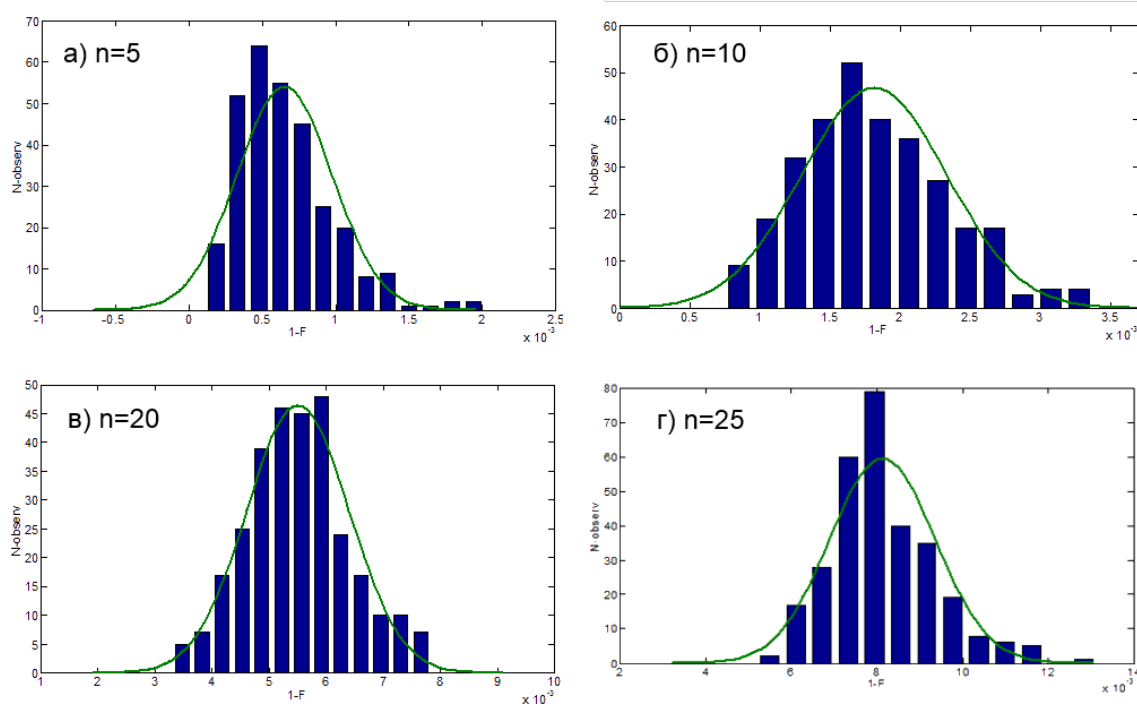
На рисунке 2. представлены результаты численных экспериментов, нацеленных на оценку влияния квантовых шумов на точность реализации квантового алгоритма Фурье. В качестве меры точности выбрана так называемая вероятность совпадения  $F$  (Fidelity) между идеальным  $|c_{ideal}\rangle$  и зашумленным  $|c_{noise}\rangle$  векторами состояния. Рассматриваемая величина может быть вычислена как квадрат модуля скалярного произведения соответствующих векторов:  $F = |\langle c_{noise} | c_{ideal} \rangle|^2$

В условиях нулевого шума вероятность совпадения равна единице ( $F = 1$ ). В качестве меры потери точности естественно выбрать величину  $1 - F$ . Для всех представленных на рис. 2 случаев уровень шума  $e = 0.01$ . Для алгоритмов с числом кубитов от 5 до 25 было выполнено по 300 численных экспериментов (гистограммы), для случая 29 кубитов – 142 эксперимента, для 32 кубитов – 10 экспериментов., кривые представляют собой гауссову аппроксимацию, итоговые статистические характеристики представлены в таблице 2.

**Таблица 2.** Результаты моделирования зашумленного квантового преобразования Фурье.

Число кубитов	Средние потери	Стандартное отклонение
5	0.000653	0.000325
10	0.00182	0.000519
20	0.00550	0.000896
25	0.00814	0.00123
29	0.01050	0.00133
32	0.0126	0.00164

Результаты этих и других численных экспериментов суммированы на Рис. 3. Здесь представлена зависимость средней точности реализации квантового алгоритма Фурье от числа кубит для уровня шума  $\epsilon = 0.01$ . Для различного числа кубит в квантовой схеме фактически было выполнено различное число численных экспериментов. Данные очень хорошо аппроксимируются параболической регрессионной зависимостью, которая была построена взвешенным методом наименьших квадратов.



**Рис. 2.** Распределение потерь точности  $1 - F$  для алгоритма квантового преобразования Фурье с различным числом кубитов.

### 3.3 Моделирование на суперкомпьютере МВС-100К РАН

Программа моделирования квантового преобразования Фурье была реализована для компьютера МВС-100К Российской академии наук. Реализация использует стандартную библиотеку обмена сообщениями MPI версии 1.1. Особенностью реализации является накопление результатов вычислений в узлах суперкомпьютера с дальнейшей их массовой отправкой необходимым процессорам, что позволяет бороться с латентностью обращения. Однако, активное использование данных заметно сказывается на скорости вычислений из-за ограниченности пропускной способности.

В таблице 3 и 4 приведены данные о времени моделирования.

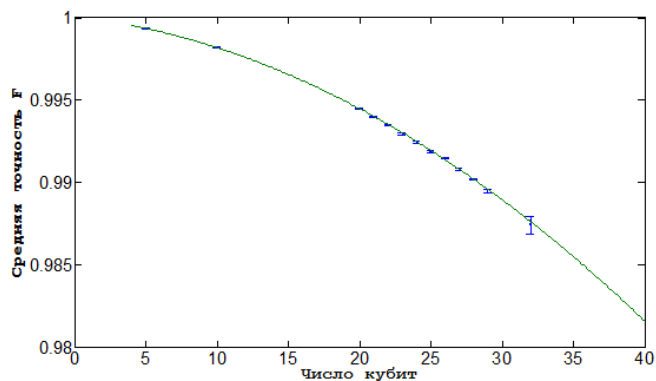


Рис. 3. Зависимость точности QFT от числа кубит. Уровень шума  $\epsilon = 0.01$ .

Таблица 3. Скорость моделирования квантового преобразования Фурье на суперкомпьютере МВС-100К.

Число кубитов	Время выполнения, секунд	Число процессоров
24	29	4
25	50.5	8
26	74	16
27	119	32
28	214	64
29	412	128
32	3460	128

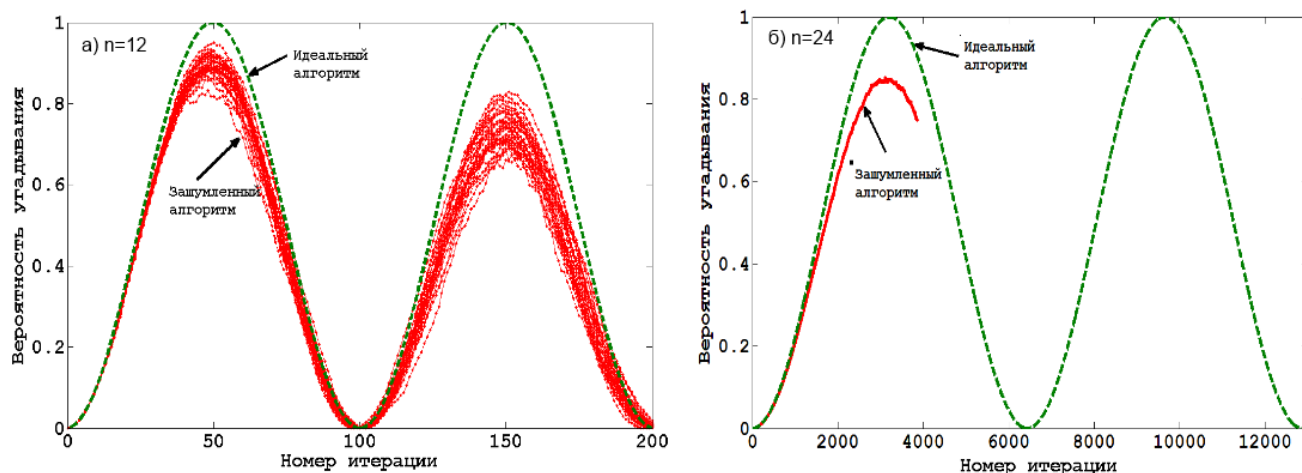
### 3.4 Моделирование алгоритма Гровера

Алгоритм Гровера, предложенный в 1996 году [22], позволяет с существенным ускорением решать переборные задачи. Пусть имеется булева функция  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ . Необходимо найти  $x$ , такой, что  $f(x) = 1$ . Очевидно, что классический алгоритм решает задачу за  $O(2^n)$  обращений к функции  $f$ . Алгоритм Гровера позволяет решить задачу за  $O(2^{n/2})$ , т.е. за корень из классического времени. Важно отметить, что для работы алгоритма Гровера необходим так называемый квантовый оракул, переводящий базисное квантовое состояние  $|x\rangle$  в  $(-1)^{f(x)}|x\rangle$ . Несложно показать, что такой оракул может быть легко создан в виде квантовой схемы, для любой булевой функции, заданной в виде схемы из функциональных элементов. В данной работе при моделировании алгоритма Гровера зашумлялись только элементы Адамара, остальная часть схемы предполагалась идеальной.

На рисунке 4 представлены результаты численного моделирования алгоритма квантового поиска Гровера. Представлена зависимость вероятности правильного решения по поиску искомого элемента в неструктурированной базе данных от числа итераций. Заметим, что идеальная реализация алгоритма Гровера, характеризуемая нулевым уровнем шума, обеспечивает вероятность угадывания, практически равную единице. Наличие шума приводит к тому, что рассматриваемая вероятность становится случайной величиной, существенно отличающейся от единицы. Так, для представленных на левом Рис.4а 30 численных экспериментов для 12 кубитового алгоритма с уровнем ошибки  $\epsilon = 0.01$  соответствующая вероятность варьируется в диапазоне примерно от 0.81 до 0.93. Заметим, что соответствующая вероятность быстро падает с увеличением числа кубитов в квантовой схеме. Например, уровень шума  $\epsilon = 0.01$  делает практически бесполезной реализацию алгоритма Гровера для 24 кубит. В этом случае уровень шума должен быть снижен на порядок. На правом рисунке Рис.4б представлена одна реализация для 24-кубитовой квантовой схемы с уровнем шума  $\epsilon = 0.001$ , соответствующая вероятность правильного решения составила 0.84. Заметим, что реализация одной итерации Гровера проще, чем реализация квантового алгоритма Фурье, однако для решения задачи требуется большое число таких реализаций (порядка  $\sqrt{2^n}$ , где  $n$  – число кубитов в квантовой схеме).

**Таблица 4.** Время выполнения 28-кубитного зашумленного квантового преобразования Фурье в зависимости от числа процессоров.

Число процессоров	Время выполнения, секунд
16	333
32	252
64	214
128	166
256	68



**Рис. 4.** Моделирование алгоритма Гровера: а) 12 кубит,  $e = 0.01$ , 30 численных реализаций, б) 24 кубита,  $e = 0.001$ , одна численная реализация.

## 4 Заключение

Сформулируем основные результаты работы. Рассмотрены принципы оценивания влияния квантовых шумов на точность реализации квантовых алгоритмов. Разработанные методы и алгоритмы реализованы на персональных компьютерах, а также на суперкомпьютере МВС-100К Российской академии наук. Представлены результаты численных экспериментов, направленных на реализацию алгоритма квантового преобразования Фурье и алгоритма Гровера. Выполнен анализ точности зашумленных квантовых операций в зависимости от числа кубит в квантовой схеме. Разработанные методы, алгоритмы и программы имеют существенное значение для реализации принципов квантовых информационных технологий в задачах обеспечения качества и эффективности элементной базы для полномасштабных квантовых компьютеров.

## 5 Благодарности

Работа поддержана Программой Президиума РАН в области фундаментальных исследований, а также частично грантом РФФИ № 12-01-31274 мол\_а.

Авторы выражают благодарность сотрудникам кафедры суперкомпьютеров и квантовой информатики факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова Ю.И. Ожигову, О.В. Корж, Д.Ю. Андрееву и С.В. Коробкову за плодотворное обсуждение вопросов, связанных с тематикой работы, а также Межведомственному Суперкомпьютерному Центру (МСЦ) РАН за предоставленные вычислительные ресурсы.

## Список литературы

- [1] К.А. Валиев, А.А. Кожин Квантовые компьютеры: надежда и реальность. Ижевск. РХД. 2001. 352с.

- [2] *Ю.И. Богданов, К.А. Валлиев, А.А. Кожин* Квантовые компьютеры: достижения, трудности реализации и перспективы // Микроэлектроника. 2011. Т.40. №4. С.243-255.
- [3] *М. Нильсен, И. Чанг* Квантовые вычисления и квантовая информация. М. Мир. 2006. 824 с.
- [4] *G. Chen, D.A. Church, B.-G. Englert et al.* Quantum Computing Devices. Principles, Designs, and Analysis. Chapman & Hall. 2007. 542 p.
- [5] *А.С. Холево* Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО 2010. 327 с.
- [6] *A.S. Holevo, V. Giovannetti* Quantum channels and their entropic characteristics // Rep. Prog. Phys. 2012. V.75, 046001 ; arXiv:1202.6480 [quant-ph].
- [7] *Yu.I. Bogdanov, G. Brida, M. Genovese et al.* Statistical Estimation of the Efficiency of Quantum State Tomography Protocols // Phys. Rev. Lett. 2010. V.105. 010404. 4p.
- [8] *Yu.I. Bogdanov, G. Brida, I.D. Bukeev et al.* // Statistical Estimation of Quantum Tomography Protocols Quality // Phys. Rev. A. 2011. V.84. 042108. 19 p.
- [9] *Ю.И. Богданов, С.А. Нуянзин* Характеристики точности томографии квантовых процессов с использованием сверхпроводниковых фазовых кубитов // Известия РАН. Серия физическая 2012. Т. 76. № 2. С. 164-168.
- [10] *Ю.И. Богданов, В.Ф. Лукичев, С.А. Нуянзин, А.А. Орликовский* Квантовые шумы и контроль качества элементной базы квантовых компьютеров на сверхпроводниковых фазовых кубитах // Микроэлектроника. 2012. Т.41. №6. с.387-398
- [11] *Ю.И. Богданов, В.Ф. Лукичев, С.А. Нуянзин, А.А. Орликовский, А.С. Холево, А.Ю. Чернявский* Математическое моделирование влияния квантовых шумов на качество элементной базы квантовых компьютеров // Труды ФТИАН. М. Наука. 2012. Т.22. с. 39-77.
- [12] *Yu.I. Bogdanov, A.Yu. Chernyavskiy, A.S. Holevo, V.F. Luckichev, A.A. Orlikovsky* Mathematical models of quantum noise // Proceedings of SPIE. V. 8700. Art. 870019 (January 8, 2013).
- [13] *Yu.I. Bogdanov, A.Yu. Chernyavskiy, A.S. Holevo, V.F. Luckichev, A.A. Orlikovsky* Modeling of quantum noise and the quality of hardware components of quantum computers// Proceedings of SPIE V. 8700. Art. 87001A. (January 8, 2013).
- [14] *Дж. Прескилл* Квантовая информация и квантовые вычисления. Том.1. М.-Ижевск. РХД. 2008. 464с.
- [15] *J.R. Burger* New approaches to quantum computer simulator in a classical supercomputer, arxiv:quant-ph/0308158 (2003)
- [16] World record: German supercomputer simulates quantum computer <http://phys.org/news189231849.html> (дата обращения 01.12.2012г.)
- [17] *Д.Ю. Андреев, О.В. Корж, С.В. Коробков, А.Ю. Чернявский* Параллельный алгоритм моделирования идеального квантового алгоритма Гровера, Работа принята на конференцию ПАВТ-2013, рекомендована к печати в «Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии»
- [18] *G. Arnold, T. Lippert, N. Pomplun, M. Richter* Large Scale Simulation of Ideal Quantum Computers on SMP-Clusters, PARCO , pp. 447-454, 2005
- [19] *F. Tabakin, B. Julia-Diaz* QCMPI: A parallel environment for quantum computing, Computer Physics Communications №180, p. 948. 2009
- [20] *P. Shor* Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. Foundations of Computer Science, 1994 Proceedings., 35th Annual Symposium on. IEEE, 1994.
- [21] *C. Zalka* Simulating quantum systems on a quantum computer. Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 454.1969 (1998): 313-322.
- [22] *L.K. Grover* A fast quantum mechanical algorithm for database search, Proceedings, 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, (May 1996) p. 212