Оценка наилучшего приближения при чебышевской аппроксимации функции полиномами

Т.В. Авдеева[1], Л.М. Ильичева[2]

[1] *Каф. математической физики, НТТУ "КПИ", Победы пр. 37, Киев, Украина*
[2]*Каф. информационных технологий, Академия водного транспорта, Фрунзе, 9, Киев, Украина*

avdeeva_t1@rambler.ru, m_ilicheva@ukr.net

Аннотация. *В работе рассматривается возможность оценивания по некоторому подмножеству точек наилучшего приближения функции полиномом. Наиболее часто на практике аналитические выражения приближают с помощью алгебраических многочленов и рациональных дробей. Оценка снизу наилучшего приближения при аппроксимации функции полиномами может быть получена путем выполнения вычислений на некотором подмножестве точек из множества, где заданы значения функции. Подход иллюстрирован примером.*

Ключевые слова

Наилучшая чебышевская аппроксимация, высокоэффективные вычисления, оценка наилучшего приближения

1 Введение

При организации высокоэффективных вычислений применяется математическая обработка массивов данных с целью их сжатия. Этот процесс реализуется путем замены дискретного представления функциональных зависимостей аналитическими выражениями с небольшим числом параметров-коэффициентов.

Постановка и разработка основ теории наилучшего равномерного приближения функций принадлежит П.Л. Чебышеву, который ввел в рассмотрение полиномы наилучшего приближения к функции и исследовал их свойства. Идеи чебышевской теории приближения получили развитие при разработке численных методов построения таких приближений. Систематическая разработка численных методов чебышевского приближения связана с работами Е.Я. Ремеза, который предложил способ последовательных чебышевских приближений и основанные на нем два теоретических метода – метод узлов и метод последовательных чебышевских интерполяций. Важным преимуществом способа наилучшей чебышевской аппроксимации является обеспечение во всех точках промежутка аппроксимации точности приближения, полученной на некотором подмножестве точек этого промежутка аппроксимации.

2 Теоретическая часть

Пусть E – ограниченное, точечное множество на числовой прямой. На этом множестве задана вещественно-числовая функция f(x), приближение к которой ищется в виде полинома степени $\leq$ n :

$$K_0 + K_1 x + \cdots \; K_{n-1} x^{n-1} + K_n x^n \; = \; P_n(x; K_0, \dots, K_n)$$

Чебышевская задача определения значений коэффициентов K_0 , K_1, … K_n полинома P_n может быть сформулирована таким образом:

Между всеми полиномами $P_n = P_n(x; K_0, K_1, \dots, K_n)$ определить такой, для которого величина:

$\sup|f - P_n| \equiv L\,(K_0, \dots, K_n) = \min$. Всякий полином, удовлетворяющий подобному требованию на точечном множестве E , называют полиномом наилучшего (равномерного) приближения степени $\leq$ n для функции f. Абсолютный минимум величины L (K) =L(K_0,…,K_n) обозначают как величину наилучшего приближения ρ :

$$\min_K L(K) = \min_K \sup|f - P_n| = \rho$$

Величина ρ рассматриваемого наилучшего приближения для f(x) тождественна с величиной наилучшего приближения (на том же множестве E) для функции:

$\Delta(x) = f(x) - P_n(x)$, где $P_n(x)$ - фиксированный полином степени $\leq n$.

Представляет интерес оценка снизу значения ρ в том случае, когда для некоторого подмножества {x_0,…, x_{n+1} }, состоящего из n+2 точек замыкания множества E, выполняется условие чередования знаков для разности $\Delta(x)$:

$$sgn\,\Delta(x_0) = -sgn\,\Delta(x_1) = sgn\,\Delta(x_2) = \dots = (-1)^{n+1} sgn\,\Delta(x_{n+1})$$

Уточненная оценка нижней границы имеет вид [1]:

$$\rho \geq \rho^1 \geq \min_{\theta \epsilon \overline{0,n}} \{\Delta(x_\theta) + \Delta(x_{\theta+1})/2\}$$

где ρ - величина наилучшего приближения для задачи общего вида, а ρ^1 - для соответствующей более простой задачи, относящейся к фиксированному подмножеству n+2 точек замыкания E, причем для этих точек справедливо указанное выше условие чередования знака для $\Delta(x)$.

Рассмотрим пример. В [1] решена задача наилучшего приближения функции f $(t) = \sqrt{1+t^2}$ на отрезке [0,1] посредством линейной функции $P_1\,(t; \beta, \alpha) = \alpha t + \beta$. Приближенная формула чебышевского типа: $\sqrt{1+t^2} \approx 0{,}955 + 0{,}414t \;\; (0 \leq t \leq 1)$. При этом разность $\Delta(t)$ имеет чередующиеся знаки в 3 последовательных точках из [0,1], а именно, в точках : 0, $\sqrt{(\sqrt{2}-1)/2}$, 1.

Нижнюю границу оценки наилучшего приближения получим из соотношений:

$$\Delta(0) = 0{,}045, \Delta\left(\sqrt{(\sqrt{2}-1)/2}\right) = -0{,}0447, \Delta\,(1) = 0{,}0452$$

Получим искомую нижнюю оценку для наилучшего приближения: $\rho \geq \min\; \{0{,}04485, 0{,}04495, 0{,}0451\} = 0{,}04495$. Таким образом, по значениям разности $\Delta(t)$ лишь в трех точках можно оценить наилучшее приближение функции полиномом.

Литература

[1] Е.Я. Ремез Основы численных методов чебышевского приближения., К., 1969.
[2] А.А. Каленчук-Порханова, Л.П. Вакал Наилучшая чебышевская аппроксимация как аппарат высокоэффективных вычислений, *Міжнародна конференція «Високопродуктивні обчислення» HPC-UA'2011 (Україна, Київ, 2011р.)*: 228-231,2011.

Estimation of the best approach of Chebushev approximation of functions by polinomails

Abstract. *In this paper the problem of the estimation of the best approximation offunctions by polinomials is consider on some subset of points, on which defined function.*