Параллельная информационная технология для решения задач многокритериальной стохастической оптимизации

Богдан Норкин

[1]Институт кибернетики им. В.М. Глушкова, Киев, Украина

bogdan.norkin@gmail.com

Аннотация. В работе описана информационная технология для решения задач многокритериальной стохастической оптимизации. В качестве обобщенной модели оптимизируемой стохастической системы используется векторная система типа «вход-случайный выход». Случайные выходы системы преобразуются в вектор детерминированных показателей эффективности и риска. Задача состоит в отыскании таких входов, которым соответствуют парето-оптимальные значения вектора показателей. Задача решается интерактивным методом параллельного случайного поиска с выделением парето-оптимальных точек. Параллельные вычисления используются для статистической оценки показателей эффективности системы, а также для ускорения случайного поиска в пространстве входов системы. Технология использует возможность параллельных вычислений на многоядерных процессорах. Возможно использование аппаратного генератора случайных чисел при наличии процессора, поддерживающего инструкцию RdRand (Intel Ivy Bridge). При решении наиболее сложных задач вычисления передаются на графический ускоритель с технологией NVIDIA CUDA. Использование локальных параллельных вычислений позволяет эффективно реализовать интерактивный метод оптимизации сложных систем. Предлагаемая технология проиллюстрирована на компьютерной системе поддержки многокритериальной оптимизации страхового бизнеса.

Abstract. **Bogdan Norkin. Parallel information technology for solving multiobjective stochastic optimization problems. HPC-UA-2014.** The article describes a technique for solving multiobjective stochastic optimization problems. As a generalized model of a stochastic system to be optimized a vector "input-random output"system is used. Random outputs are converted into a vector of deterministic performance and risk indicators. The problem is to find those inputs that correspond to a Pareto-optimal values of output indicators. The problem is solved by an interactive parallel random search with a release of Pareto-optimal points. Parallel computations are used for statistical evaluation of key performance indicators, as well as to accelerate random search in the space of the system inputs. The technology uses possibility of parallel computations on multicore processors. It is possible to use a built-in hardware random number generator supporting the instruction RdRand (Intel Ivy Bridge family). When solving the most complex problems calculating is transfred to a graphic accelerator under technology NVIDIA CUDA. Using local desktop parallel computing allows efficient implementation of an interactive method for optimization of complex systems. The proposed technique is illustrated on a computer system for supporting multi-criteria optimization of the insurance business.

Ключевые слова

Многокритериальная стохастическая оптимизация, оптимальность по Парето, случайный поиск, параллельный метод Монте-Карло, оптимизация страхового бизнеса. Multiobjective stochastic optimization, Pareto optimality, random search, parallel Monte Carlo method, optimization of insurance business.

1 Введение

Современный подход к принятию оптимальных решений основан на моделировании систем и явлений и применении методов оптимизации. Любая система может рассматриваться как система типа «вход-выход»

$y = g(x)$, где x обозначает вектор входных параметров из некоторого допустимого множества X, а y - вектор выходных параметров из множества Y, g - некоторое отображение из X в Y. Оптимизации (например, максимизации) подлежит некоторый функционал полезности $f(x, y)$ при ограничениях $y = g(x)$, $x \in$ X. ×асто вектор входных параметров можно разделить на управляемую часть, которую по-прежнему, будем обозначать x, и на не управляемую часть ω, которая принимает значения из множества Ω. Таким образом, модель принимает вид $y = g(x, \omega)$. Вектор ω называется вектором неопределенных параметров, который может быть как детерминированным, так и случайным с распределением P. В первом случае задача оптимизации принимает вид: $\min_{\omega\in\Omega} f(x, y = g(x, \omega)) \to \max_{x\in X}$, что соответствует так называемому максиминному подходу к принятию решений. Во втором случае задача относится к области стохастического программирования и, в частности, может формулироваться так: $F(x) = \mathrm{E}f(x, y = g(x, \omega)) \to \max_{x\in X}$, где E обозначает операцию математического ожидания [1, 2]. Однако далеко не всегда можно рационально и однозначно выбрать функцию полезности f, определенную на множестве пар «вход-выход» X × Y, хотя на X × Y или на Y может быть определено некоторое отношение предпочтений, которое позволяет рассматривать только не доминируемые пары «вход-выход». Данная ситуация относится к многокритериальной оптимизации [3]. Если модель $y = g(x, \omega)$ содержит неопределенные параметры ω, то эта ситуация принятия решений квалифицируется как неопределенное программирование и может быть формализована различными способами [4]. Отметим, что задача стохастического программирования уже содержит векторный критерий $f(x, y = g(x, \omega))$, $\omega \in \Omega$, с большим числом компонент, которые, так или иначе, сворачиваются в один показатель. ×аще всего используется показатель среднего значения $F(x) = \mathrm{E}f(x, y = g(x, \omega))$, а также функции дисперсии, вероятности, квантили (VaR) и другие показатели риска [2]. Оптимизация таких показателей требует значительных вычислительных ресурсов и, в частности, применения параллельных вычислений. В настоящей работе обсуждаются возможности технологий параллельных вычислений для реализации многокритериальной стохастической оптимизации.

2 Литературный обзор

В отличие от стандартных задач однокритериального стохастического программирования [1, 2] задача оптимизации вектора выходов системы по параметрам может содержать невыпуклые или даже разрывные функции, поэтому традиционные методы стохастического программирования градиентного типа могут быть не применимы. Тогда для решения задачи необходимо применять методы управляемого случайного поиска, например, эволюционные или гибридные алгоритмы [5, 6, 7, 8]. При небольшой размерности n множества $X \subset R^n$ конкурентно способным может быть и простой метод равномерного случайного поиска, тем более, что он допускает естественное распараллеливание. Однако при решении многомерных комбинаторных задач он уступает эволюционным алгоритмам [9]. Обзор компьютерных систем детерминированной многокритериальной оптимизации имеется в [10]. Вопросы применения параллельных вычислений в многокритериальной оптимизации обсуждаются в [11]. В настоящей статье развиваются результаты предыдущих работа автора [12, 13] по имитационному моделирования страхового бизнеса в направлении стохастической многокритериальной оптимизации с использованием параллельных вычислений.

3 Стохастическая многокритериальная оптимизация

В случае, когда функция полезности не известна, приходится иметь дело непосредственно с векторной моделью $y = g(x)$, которая отображает множество входов X в множество выходов $Y = f(X) = \{y = f(x),\ x \in X\} \subseteq$ Y. При этом на множестве выходов имеется некоторое отношение предпочтений $\prec$, не обязательно задаваемое функцией полезности. Если $Y \subseteq R^m$, то это отношение предпочтений $\prec$ обычно задается конусом неотрицательных векторов $R^m_+ = \{y = (y_1, ..., y_m) \in R^m :\ y_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq m\}$. При этом $y_1 \prec y_2$ тогда и только тогда, когда $(y_2 - y_1) \in R^m_+$. Множество $\prec$-оптимальных образов Y^* является подмножеством $Y = f(X)$ таким, что не существует $y \in Y$, $y \prec y^*$ и $y \neq y^*$. Соответствующее ему множество прообразов $X^* = \{x \in X :\ f(x) \in Y^*\}$ называется множеством $\prec$-оптимальных решений. Задача векторной оптимизации состоит в нахождении или аппроксимации множеств Y^* и X^*.

Если модель содержит неопределенные или стохастические параметры ω и нет функции полезности, а есть только отношение предпочтения $\prec$ на множестве выходов, то мы имеем дело с задачей векторного (или многокритериального) стохастического программирования [15]. Тогда для каждого ω существует свое множество выходов $Y_\omega = f_\omega(X) = \{y = f(x, \omega),\ x \in X\}$ и свое $\prec$-оптимальное множество Y^*_ω и нужно еще определить, какое множество считать общим оптимальным для всех ω. Для этого необходимо определить дополнительное отношение предпочтения на множестве случайных векторов $f(x, \omega)$.

В случае одномерной стохастической модели, когда $y = f(x,\omega) \in R$, это может быть отношение стохастического доминирования первого $\prec_{GrindEQ_1}$ или высших порядков $\prec_{(i)}$, $i \geq 2$, [16].

Напомним, что $f(x_1,\omega) \prec_{GrindEQ_1\, f(x_2,\omega)}$, если для функций распределения $F_1(t)$ и $F_2(t)$ случайных величин $f(x_1,\omega)$ и $f(x_2,\omega)$ выполнено $F_1(t) \geq F_2(t)$ для всех $t \in R$. Имеет место $f(x_1,\omega) \prec_{GrindEQ_2\, f(x_2,\omega)}$, если $Eu\,(f(x_1,\omega)) \geq Eu\,(f(x_2,\omega))$ для всех вогнутых неубывающих функций $u(\cdot)$ таких, что математические ожидания существуют.

Для многомерных случайных величин пока нет общепринятых понятий стохастического доминирования.

Например, можно рассмотреть отношение предпочтения $\prec_{\mathrm{E}}$ на основе математических ожиданий, $f(x_1,\omega) \prec_{\mathrm{E}} f(x_2,\omega)$ тогда и только тогда, когда $Ef(x_1,\omega) \leq Ef(x_2,\omega)$ (покомпонентно) и $Ef(x_1,\omega) \neq Ef(x_2,\omega)$, а в качестве оптимального множества можно взять $\prec_{\mathrm{E}}$-оптимальное подмножество множества $\{\mathrm{E}f(x,\omega),\ x \in X\}$. Известно, что множество $\prec_{\mathrm{E}}$-оптимальных точек может быть получено путем оптимизации множества линейных $\langle w, Ef(x,\omega)\rangle$, $w \in W$, или множества некоторых нелинейных $U(Ef(x,\omega))$, $U \in \mathrm{U}$, скалярных сверток векторного критерия $\mathrm{E}f(x,\omega)$ [3, 17]. В работе [18] математические ожидания $Ef(x,\omega)$ заменялись их эмпирическими оценками $E_N f(x,\omega)$ и изучалась сходимость множества оптимальных точек задач $U\,(\mathrm{E}_N f(x,\omega)) \to extr_{x\in X}$, $U \in \mathrm{U}$, к $\prec_{\mathrm{E}}$-оптимальному множеству задачи.

Аналогично вводятся отношения предпочтения $\prec_{\vec{t}}$ и $\prec_{\vec{q}}$, где $\vec{t} = (t_1, ..., t_m)$ и$\vec{q} = (q_1, ..., q_m)$ фиксированы, на основе сравнения, соответственно, наборов вероятностей $\Pr\{f_i(x,\omega) \geq t_i\}$, $i = 1, ..., m$, и квантилей $Q_i(x,q_i) = \inf\{t:\ \Pr\{f_i(x,\omega) \geq t\} \leq q\}$, $i = 1, ..., m$.

Наряду со средними значениями $Ef(x,\omega) = (Ef_1(x,\omega), ..., Ef_m(x,\omega))$ целесообразно рассматривать стандартные отклонения $\sigma_i(x) = \left(\mathrm{E}(f_i(x,\omega) - \mathrm{E}f_i(x,\omega))^2\right)^{1/2}$ или стандартные полуотклонения $\sigma_i^+(x) = \left(\mathrm{E}\max^2\{0, f_i(x,\omega) - \mathrm{E}f_i(x,\omega)\}\right)^{1/2}$ показателей $f_i(x,\omega)$ от их средних значений $\mathrm{E}f_i(x,\omega)$, $i = 1, ..., m$, а также векторные показатели вида $(Ef_1(x,\omega) + \alpha_1\sigma_1(x), ..., Ef_m(x,\omega) + \alpha_m\sigma_m(x))$. В работе [19] изучались связи между парето-оптимальными множествами различных детерминированных многокритериальных формализаций задачи стохастической векторной оптимизации, в том числе задач: $Ef(x,\omega) \to \min_{x\in X}$, $\sigma(x) = (\sigma_1(x), ..., \sigma_m(x)) \to \min_{x\in X}$, $(\mathrm{E}f_1(x,\omega) + \alpha_1\sigma_1(x), ..., \mathrm{E}f_m(x,\omega) + \alpha_m\sigma_m(x)) \to \min_{x\in X}$ $\left(\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in R_+^m\right)$, $\{\Pr\{f_i(x,\omega) \geq t_i\},\ i = 1, ..., m\} \to \max_{x\in X}$, $\{Q_i(x,q_i),\ i = 1, ..., m\} \to \min_{x\in X}$.

Если рассматривать настоящую статью в контексте стохастической многокритериальной оптимизации, то в дальнейшем мы будем иметь дело с задачей векторной оптимизации вида

$$\left\{\mathrm{E}f_i(x,\omega),\ \sigma_i^+(x),\ P\{f_i(x,\omega) \leq u_i\},\ i = 1, ..., m\right\} \to \min_{x\in X}$$

и строить аппроксимации парето-оптимального множества этой задачи. При этом показатели $\mathrm{E}f_i(x,\omega)$ выступают как меры полезности, а $\sigma_i^+(x)$ и $P\{f_i(x,\omega) \leq u_i\}$ – как меры риска при выборе решения x.

4 Многокритериальная задача стохастического оптимального управления в дискретном времени

Рассмотрим управляемый стохастический векторный процесс следующего вида [20]:

$$y^{t+1} = f_t(y^0, y^1, ..., y^t; \xi^0, \xi^1, ..., \xi^t; u_t(y^0, ..., y^t; \xi^0, ..., \xi^t)), y^0 = x_0, t = 0, 1, ..., T, \tag{1}$$

где $t = 0, 1, ..., T$ обозначает дискретное время; $\{y^0, y^1, ...\}$ – последовательность состояний процесса; $\{\xi^0, \xi^1, ...\}$ – неконтролируемая последовательность случайных величин, влияющих на состояния процесса; $u_t(\cdot)$ – последовательность функций-управлений, произвольно взятых из некоторого множества допустимых управлений U_t; $y^0 = x_0$ – начальное состояние процесса; $\{f_t(\cdot)\}$ – модель процесса. Пусть на каждом шаге t процесса лицо, принимающее решения (ЛПР), оценивает процесс функциями $r_{ti}(y^0, ..., y^t; u_0(\cdot), ..., u_k(\cdot); \xi^0, ..., \xi^k)$, $i = 1, ..., m$, и совокупные дисконтированные оценки процесса за $T+1$ периодов времени даются выражениями

$$I_i\,(u_0(\cdot), u_1(\cdot), ..., u_T(\cdot)) = \mathrm{E}\sum_{k=0}^{T}(\gamma_i)^k r_{ki}(y^0, ..., y^k; u_0(\cdot), ..., u_k(\cdot); \xi^0, ..., \xi^k), \tag{2}$$

где $\gamma_i \in (0,1]$ – дисконтирующие множители, $i = 1,...,m$. Выбирая различные функции $r_{ki}(y^0,...,y^k;u_0(\cdot),...,u_k(\cdot);\xi^0,...,\xi^k)$ можно оценить различные аспекты модели, например, если

$$r_{ki^*}(y^0,...,y^k;u_0(\cdot),...,u_k(\cdot);\xi^0,...,\xi^k) = \begin{cases} 1, & \exists y^k \in A,\ k \le t, \\ 0, & y^k \notin A\ \forall k \le t, \end{cases} \quad \gamma = 1,$$

то соответствующий индикатор $I_{i^*}(\cdot)$ выражает вероятность попадания процесса в область A.

Таким образом, задача стохастического многокритериального управления имеет вид

$$\left[I_i\left(u_0(\cdot),u_1(\cdot),...,u_T(\cdot)\right),\ i=1,...,m\right] \to \mathrm{extr}_{\{u_t(\cdot)\in U_t,\ t=0,...,T\}}. \tag{3}$$

Существенной трудностью решения задачи (3) является необходимость вычисления или оценивания математического ожидания (2) по всем возможным траекториям процесса (1). В общем случае это можно сделать только методам статистических испытаний Монте-Карло. Другая трудность состоит в том, что задача (3) является бесконечномерной.

Задача (3) значительно упрощается, если оптимальные управления отыскиваются в классе параметрически заданных функций $U_t = \left\{u_t(y^0,...,y^t;\xi^0,...,\xi^t;x^t),\ x^t \in X^t\right\}$, где x^t – конечномерный параметр. Тогда функционал I_i является функцией конечномерных параметров, и задача его оптимизации (3) превращается в конечномерную задачу стохастического программирования.

Еще одно упрощение связано с рассмотрением (векторных) марковских процессов:

$$y^{t+1} = f(y^t;\xi^t;u(y^t;\xi^t)), y^0 = x_0, t = 0,1,...,T, \tag{4}$$

в которых модель f и управление u не меняются со временем, а последующее состояние y^{t+1} зависит только от текущего состояния системы y^t и текущего наблюдения за состояние среды ξ^t. Во многих случаях оптимальное управление $u_t(\cdot)$ можно искать в классе функций, зависящих только от $(y^t;\xi^t)$ или от y^t [20]. Если функциональная форма управления выбрана и зависит только от n-мерного параметра $x \in R^n$, т.е. $u(y,\xi,x)$, то (3) опять превращается в задачу конечномерного многокритериального стохастического программирования вида

$$\left[I_i^T\left(x_0,x\right) = \mathrm{E}\sum_{k=0}^{T}(\gamma_i)^k r_{ki}(y^k,\xi^k,u(y^k,\xi^k,x)),\ i=1,...,m\right] \to \mathrm{extr}_{x\in X}. \tag{5}$$

Отдельной проблемой является вычисление значений индикаторов $I_i\left(x_0,x\right)$ при фиксированном значении вектора параметров (x_0,x), поскольку они являются математическими ожиданиями по случайным траекториям процесса (4). Даже если случайные величины ξ^k являются дискретными с известными вероятностями реализаций, нахождение математического ожидания в (5) потребует суммирования по всем возможным траекториям процесса (4), что может быть практически не выполнимой задачей.

Универсальным методом оценки интегралов (2) является метод Монте-Карло, который, однако, может потребовать очень большого числа испытаний для достижения приемлемой точности. Заметим, что симуляции траекторий процесса (1) могут выполняться параллельно, что может существенно сократить время вычислений по методу Монте-Карло. Альтернативным подходом является нахождение индикаторов $I_i^T\left(x_0,x\right)$ как решений интегральных соотношений Беллмана [14]. Оказывается, при определенных условиях на марковский процесс (4), индикаторы $I_i^T\left(x_0,x\right)$ удовлетворяют соотношениям:

$$I_i^t\left(x_0,x\right) = \mathrm{E}r_{(T-t)i}(x_0,\xi,u(x_0,\xi,x)) + \gamma \mathrm{E}I_i^{t-1}\left(f(x_0;\xi;u(x_0,\xi,x)),x\right),$$

$$I_i^0\left(x_0,x\right) = \mathrm{E}r_{Ti}(x_0,\xi,u(x_0,\xi,x)), t = 1,...,T. \tag{6}$$

Если случайная величина $\xi \in \{\xi_1,...,\xi_S\}$ является дискретной с известными вероятностями p_s реализаций ξ_s, то (6) превращаются в детерминированные соотношения

$$I_i^t\left(x_0,x\right) = \sum_{s=1}^{S} r_{(T-t)i}(x_0,\xi_s,u(x_0,\xi_s,x)) + \gamma\sum_{s=0}^{S} I_i^{t-1}\left(f(x_0;\xi_s;u(x_0,\xi_s,x)),x\right),$$

$$I_i^0\left(x_0,x\right) = \sum_{s=1}^{S} r_{Ti}(x_0,\xi_s,u(x_0,\xi_s,x)), t = 0,...,T-1,$$

которые могут быть использованы для вычисления $I_i^T(x_0, x)$. Для этого нужно ввести сетку по одномерной переменной x_0 и последовательно вычислить $I_i^0(x_0, x)$, $I_i^1(x_0, x)$,..., $I_i^T(x_0, x)$ в точках сетки. В промежуточных точках значения этих функций вычисляются путем интерполяции. Заметим, что данный итерационный процесс естественным образом распараллеливается. Значения $I_i^t(x_0, x)$ в различных точках сетки вычисляются независимо друг от друга на основе дискретной аппроксимации функции $I_i^{t-1}(\cdot, x)$, полученной на предыдущей итерации. Поэтому эти вычисления аналогично [21, уравнение (7)] могут исполняться параллельно.

5 Программная реализация многокритериальной стохастической оптимизации страхового бизнеса

На основе изложенных методологических подходов была реализована новая версия системы страхового моделирования и многокритериальной оптимизации страхового бизнеса. Предыдущая версия описана в работах [13, 12], в которой основным средством оптимизации было исследование зависимости показателей работы страховой компании от параметров. В настоящей версии реализована поддержка многокритериальной оптимизации, в частности нахождение и визуализация парето-оптимальных решений.

Эволюция резервов страховой компании моделируется процессом риска следующего вида [13, 12]:

$$y^{t+1} = \begin{cases} y^t + x_1 - (x_2 + x_3 \max\{0, y^t - x_4\}) - (x_5 x_6 + \xi^t - x_5 \xi^t), & y^t \geq x_7, \\ y^t, & y^t < x_7, \end{cases},$$

$y^0 = x_0$, $t = 0, 1, ..., x_8$, где компоненты вектора параметров $x = (x_0, x_1, ..., x_8)$ имеют следующий смысл:

x_0 - начальное состояние резервов;

x_1 - агрегированная премия в единицу времени;

x_2 - обязательные платежи в единицу времени, $0 \leq x_2 \leq x_1$;

x_3 - доля избыточного капитала, идущая на выплату дивидендов, $0 \leq x_3 \leq 1$;

x_4 - порог капитала, с которого начинаются выплаты дивидендов, $0 \leq x_4 \leq x_0$;

x_5 - уровень пропорционального перестрахования, $0 \leq x_5 \leq 1$;

x_6 - удельный коэффициент затрат на пропорциональное перестрахование;

x_7 - порог неплатежеспособности

x_8 - временной горизонт.

Функционирование компании оценивается с точки зрения следующих показателей:

$I_1(x) = \mathrm{E} \sum_{k=0}^{x_8} \gamma^k x_3 \max\{0, y^k - x_4\}$ - ожидаемые дисконтированные дивиденды;

$I_2(x) = \mathrm{E}\gamma^{x_8} \max\{0, y^{x_8}\}$ - ожидаемый капитал в конце планового периода, при условии неразорения;

$I_3(x) = 1 - \mathrm{E} \sum_{\{y^k \geq x_7,\, 0 \leq k \leq x_8\}} 1$ - вероятность неплатежеспособности;

$I_4(x) = \mathrm{E} \max_{0 \leq t \leq x_8} \left\{t : \min_{0 \leq k < t} y^k \geq 0\right\}$ - ожидаемый момент разорения.

Используется также рад вспомогательных функционалов: квантили, условные средние и дисперсии различных случайных характеристик процесса (собранных дивидендов, остаточного капитала, времени жизни).

В системе реализованы следующие функции:

сохранение и загрузку проекта (данных и параметров модели);

загрузка статистических данных и стандартный анализ данных;

задание интервалов для изменяемых параметров модели;

задание параметров статистического моделирования (числа точек в пространстве параметров и числа симуляций для одной точки);

построение и графическое представление зависимостей любого показателя I_i функционирования системы от любого исследуемого параметра x_j;

оценка ошибок результатов расчетов;

визуальное отображение результатов моделирования (облака точек) в плоскостях «показатель i – показатель j» для любых i, j;

дискретная аппроксимация множества парето-оптимальных точек задачи по любому подмножеству показателей;

визуальное отображение характеристик парето-оптимальных точек;

механизм просмотра и сравнения предпочтительных парето-оптимальных точек;

оценка скорости вычислений;

помощь пользователю;

вывод результатов в память и на печать.

Система работает на реальных статистических данных, полученных для конкретных компаний путем обработки информации с сайта forinsurer.com .

При решении задачи на четырехядерном процессоре Intel Core i5 3570K был задействован аппаратный генератор случайных чисел (RdRand), встроенный в процессоры семейства Ivy Bridge. При этом фактически вычисления по методу Монте-Карло распараллеливались на восемь вычислительных псевдоядер процессора Intel Core i5.

6 Численная иллюстрация многокритериальной оптимизации страхового бизнеса

Продемонстрируем результаты расчетов на следующих тестовых данных:

$$x = (x_0, x_1, ..., x_8) = (0,\ 1,\ [0.4 \div 0.6],\ [0 \div 1],\ [0 \div 5],\ 0,\ 0,\ 0,\ 50)\,;$$

$$\xi = (\xi_1, ..., \xi_5) = (0.419,\ 0.514,\ 0.650,\ 0.658,\ 0.502)\,, P\{\xi = \xi_i\} = 1/5.$$

На рис. 1 показана зависимость вероятности неплатежеспособности $I_3(x)$ (слева) и собранных дивидендов $I_1(x)$ (справа) от x_3 (доли капитала, идущей на дивиденды) при фиксированных значениях остальных переменных.

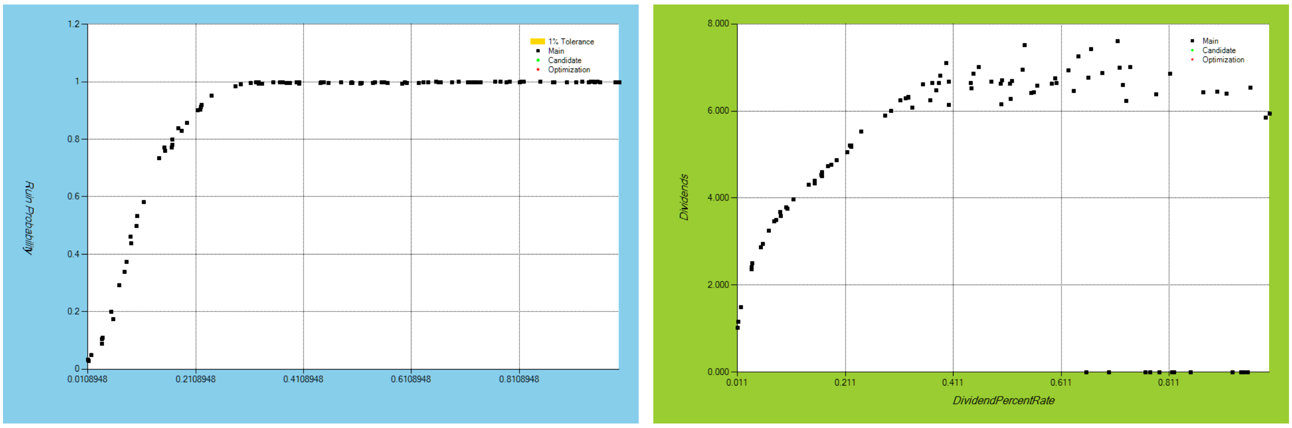

Рис. 1. Зависимость вероятности разорения I_2 и собранных дивидендов I_1 от параметра x_3.

На рис. 2 показано облако точек-индикаторов в плоскостях $(I_1,\ I_3)$ (слева), $(I_2,\ I_3)$ (справа) для $N = 1000$ случайно выбранных точек-параметров в области $x_2 \in [0.4 \div 0.6]$, $x_3 \in [0 \div 1]$, $x_4 \in [0 \div 5]$ и фиксированных остальных параметрах. На правом рисунке отчетливо видна парето-оптимальная граница по показателям ”остаточный капитал – вероятность разорения”.

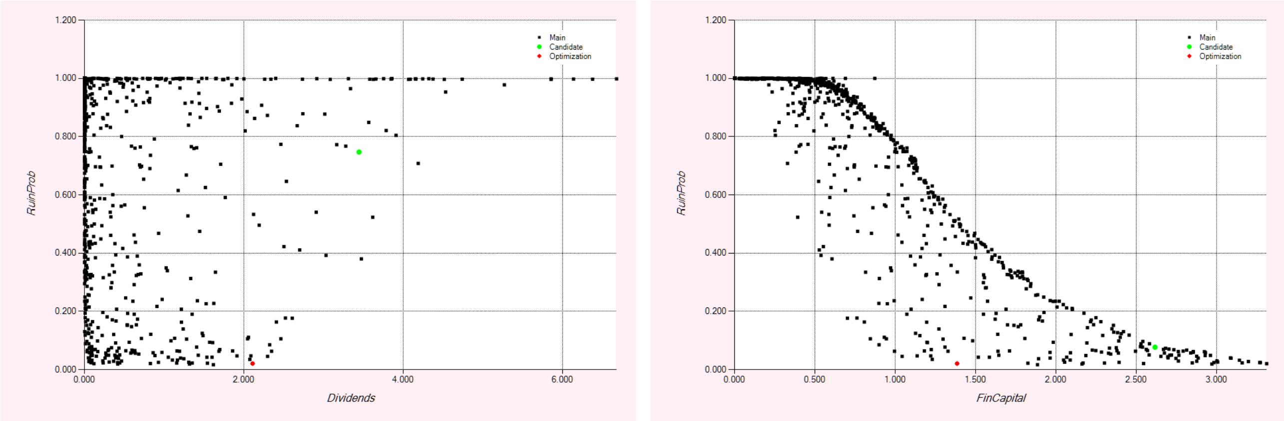

Рис. 2. Облако точек в плоскостях индикаторов (I_1, I_2) и (I_1, I_3).

На рис. 3 показано облако $N = 10000$ точек-индикаторов в плоскости (I_1, I_2) до (левый рис.) и после (правый рис.) (I_1, I_2, I_3)-парето-оптимизации.

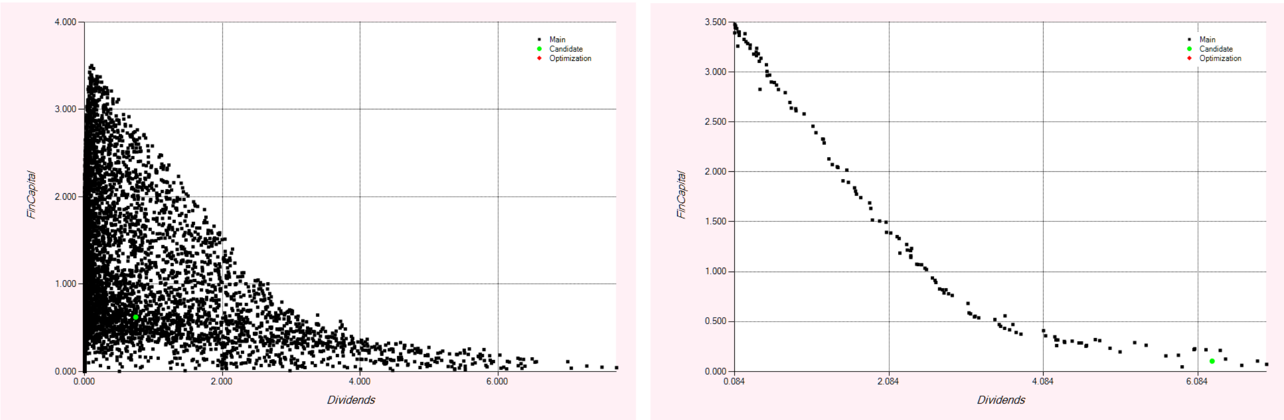

Рис. 3. Облако точек в плоскости (I_1, I_2) до и после парето-оптимизации.

На рис. 4 показаны те же результаты (I_1, I_2, I_3)-парето-оптимизации, но в плоскостях (I_1, I_3) (слева) и (I_2, I_3) (справа). Дальнейший выбор компромиссной по показателям (I_1, I_2, I_3) точки осуществляется путем визуального сравнения и анализа графиков на рис. 3, 4. В разработанной программной системе реализована поддержка такого выбора путем подсветки отмеченной точки на всех графиках и вывода на экран характеристик данной точки.

7 Заключение

В работе описана информационная технология многокритериальной оптимизации стохастических систем типа «вход-случайный выход». На практике такие модели являются чрезвычайно нелинейными и не выпуклыми. Агрегировано их функционирование описывается рядом обобщающих детерминированных векторных показателей, таких как средние значения, квантили, вероятности попадания выходов в заданную область и др. Далеко не всегда векторный показатель можно однозначно свернуть в скалярный индикатор, который затем можно оптимизировать. Поэтому задача состоит в нахождении таких входов, которым соответствуют парето-оптимальные векторы показателей. В работе предлагается решать задачу методом визуализированного интерактивного параллельного случайного поиска с выделением парето-оптимальных точек. Технология проиллюстрирована на компьютерной системе поддержки многокритериальной оптимизации страхового бизнеса.

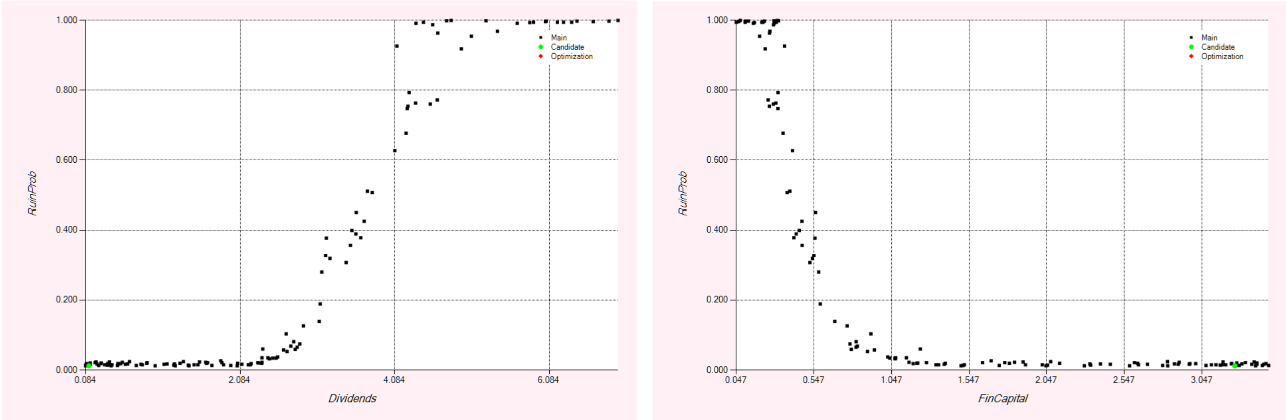

Рис. 4. Множество (I_1, I_2, I_3)-парето-оптимальных точек в плоскостях (I_1, I_3) и (I_2, I_3).

Список литературы

[1] Ю.М. Ермольев: Методы стохастического программирования. – М.: Наука, 1976. – 276 с.

[2] A. Shapiro, D. Dentcheva, A. Ruszczyćnski: Lectures on stochastic programming: Modeling and theory. – SIAM, Philadelphia, 2009. – 442 p.

[3] В.В. Подиновский, В.Д. Ногин: Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

[4] Б. Лю: Теория и практика неопределенного программирования. Пер. с англ. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. – 416 с.

[5] R.T. Marler, J.S. Arora: Survey of multi-objective optimization methods for engineering. *Structural and multidisciplinary optimizatio*, 26(6): 369-395, 2004.

[6] A. Konak, D.W. Coit, A.E. Smith: Multi-objective optimization using genetic algorithms: A tutorial *Reliability Engineering & System Safety*, 91(9): 992-1007, 2006.

[7] C.A. Coello Coello: Evolutionary multi-objective optimization: a historical view of the field *Computational Intelligence Magazine, IEEE*, 1(1): 28-36, 2006.

[8] J. Branke, K. Deb, K. Miettinen, R. Slowiński (Eds.): Multiobjective Optimization. Interactive and Evolutionary Approaches. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. - 470 p.

[9] M.P. Kleeman, G.B. Lamont: Evolutionary Multi-Objective Optimization in Military Applications. In: Multi-Objective Optimization in Computational Intelligence: Theory and Practice / L.T. Bui and S. Alam, eds. Hershey, New York: Information Science Reference (an imprint of IGI Global), 2008. – P. 388-429.

[10] S. Poles, M. Vassileva, D. Sasaki: Multiobjective Optimization Software / J. Branke et al. (Eds.): Multiobjective Optimization. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – P. 329–348.

[11] E. Talbi, S. Mostaghim, T. Okabe, H. Ishibuchi, G. Rudolph, C.A. Coello Coello: Parallel Approaches for Multiobjective Optimization / J. Branke et al. (Eds.): Multiobjective Optimization. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – P.349-372.

[12] Б.В. Норкин: Системный имитационный анализ и оптимизация страхового бизнеса. *Кибернетика и системный анализ*, 50(2): 112-125, 2014.

[13] B.V. Norkin: On performing actuarial calculations on GPU. *Вісник НТУУ «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка: Зб. наук. пр.* – К.: Век+, – 2012. – № 56. – С.113-119.

[14] Б.В. Норкин: Стохастическое оптимальное управление процессами риска в дискретном времени с липшицевыми функциями выигрыша. *Кибернетика и системный анализ*, 50(5): 136-151, 2014.

[15] I.M. Stancu-Minasian: Stochastic programming with multi-objective functions. – Bucharest: Edeisteurrvae Academiei, 1984. – 334 p.

[16] A. Müller, D. Stoyan: Comparison Methods for Stochastic Models and Risks. – Chichester, UK : John Wiley & Sons, 2002. – 330 p.

[17] J. Jahn: Vector Optimization. Theory, Applications, and Extensions. Second Edition. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. – 481 p.

[18] J. Fliege, H. Xu: Stochastic multiobjective optimization: sample average approximation and applications. *J. of Optimization Theory and Applications*, 151(1): 135-162, 2011.

[19] R. Caballero, E. Cerda, M.M. Munoz, L. Rey. Efficient solution concepts and their relations in stochastic multiobjective programming. *J. Optim. Theory Appl.*, 110: 53-74, 2001.

[20] И.И. Гихман, А.В. Скороход: Управляемые случайные процессы. – Киев: Наукова думка, 1977. – 252с.

[21] B. Norkin: Parallel computations in insurance business optimization / Proceedings of the 1-st International Conference on High Performance Computing (HPC-UA 2011, October 12-14, 2011, Kyiv, Ukraine). Kyiv: National Academy of Sciences of Ukraine, 2011. P. 33-39.