Паралельні обчислення в точному методі розв'язання мінімаксної задачі розміщення джерел

Кондратовець С.Л., Яремчук С.І., Бурда Р.В.

Житомирський державний технологічний університет, вул. Черняховського 103, м. Житомир, Україна

yaremchuk_s@mail.ru, s.kondratovec@gmail.com, burda_r@mail.ru

Анотація. *Стаття присвячена використанню паралельних обчислень в точному методі розв'язання мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля на фіксовані посадкові місця. Наведено математичну постановку задачі та обчислювальну схему розробленого метода. Оскільки схема запропонованого методу гілок та меж передбачає розбиття множини припустимих розв'язків на підмножини із знаходженням оцінок кожної з них, то пропонується для знаходження оцінок використовувати паралельні обчислення. Для програмної реалізації використано мову програмування C#. Отримані результати обчислювального експерименту свідчать про досягнення виграшу у швидкодії при використанні двох процесорів у 1,6 рази, чотирьох – у 3,4.*

Ключові слова

Метод гілок та меж, дискретна мінімаксна задача розміщення, угорський алгоритм, паралельні обчислення.

1 Вступ

В різних галузях науки та техніки часто виникають задачі оптимального розміщення джерел фізичного поля. Наприклад, при проектуванні ядерного реактору (розміщення графітових стержнів), тепловому синтезі блоків мікроелектронної апаратури, будівництві, тощо. Тобто проблема оптимізації розміщення джерел фізичного поля є актуальною. Такі задачі є складними та ресурсоємкими, що збільшує їх час розв'язання на електронно-обчислювальних пристроях. Поява багатоядерних процесорів дозволила використати механізми паралельних обчислень, що дає можливість зменшити час розв'язання задач оптимізації. В даній роботі розглядається задача знаходження такого розміщення джерел фізичного поля, при якому максимальне із значень поля в контрольних точках буде найменшим.

2 Постановка задачі

Нехай є деяка область D, що містить посадкові місця на які потрібно розмістити джерела фізичного поля (з заданими геометричними і фізичними характеристиками) таким чином, щоб максимальне із значень поля в контрольних точках (що належать цій області) було найменшим. Фізичне поле, що утворюється джерелами та крайовими умовами, описується наступною крайовою задачею:

$$L_u = \tilde{f}(y, Z),$$

$$B_i u = \varphi_i,\ j \in [1:J],$$

де L – заданий лінійний диференційний оператор, B_i – задані лінійні оператори, які визначають граничні умови, φ_i – задані функції; y – поточна точка області Ω,

$$\tilde{f}(y,Z)=\begin{cases} A^i(y-Z^i), якщо \quad y\in D_i \\ 0, якщо \quad y\notin \bigcup_{i=1}^{N} D_i, \end{cases}$$

$A^i(y-Z^i)$ – інтенсивність i -го джерела.

Була побудована наступна математична модель цієї задачі, що має вигляд зручний для застосування розробленого точного методу її розв'язання. На розміщення джерел накладаються наступні обмеження:

1) на кожне посадкове місце може бути призначене лише одне джерело;
2) кожне джерело може бути призначене лише на одне посадкове місце.

Необхідно знайти таке допустиме розміщення, при якому максимальне з значень фізичного поля в контрольних точках має найменше значення.

Керовані змінні:

$$x_{ij}=\begin{cases} 0, & \text{якщо i - те джерело не призначене на j - те місце} \\ 1, & \text{якщо i - те джерело призначене на j - те місце} \end{cases},$$

$i\in[1:N], j\in[1:N]$. Тоді математична модель сформульованої задачі матиме наступний вигляд:

$$f(x)=\max_{k\in[1:K]} f_k(x)\to \min,$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{L} x_{ij}=1, j\in[1:L], \\ \sum_{j=1}^{L} x_{ij}=1, i\in[1:L], \end{cases}$$

$$\text{де } f_k(x)=\sum_{i=1}^{L_{\max}}\sum_{j=1}^{L_{\max}} c_{ij}^k x_{ij},$$

Відомі два наближені методи розв'язання мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля, [1] та [2]. Перший (гібридний метод) є комбнацією трьох наближених методів і може використовувтись для задач невеликої розмірності, а швидкодія другого (*"Р-алгоритму"*) суттєво залежить від кількості контрольних точок. Нами було побудовано точний метод розв'язання цієї задачі, що відноситься до класу методів гілок та меж. Швидкодія його майже не залежить від кількості контрольних точок, але залежить від кількості джерел. Щоб позбутися цього недоліку було запропоновано використати в алгоритмі паралельні обчислення.

3 Обчислювальна схема методу

1. Знаходимо опорний план та наближення до розв'язку x^0, розв'язавши задачу про призначення угорським алгоритмом на матриці максимумів вихідної задачі.
2. Знаходимо значення фізичного поля у кожній контрольній точці при заданому розміщенні

$$f_k(x^0)=\sum_{i=1}^{L}\sum_{i=1}^{L} c_{ij}x_{ij}^0$$

3. Знаходимо

$$\max_{k\in[1:K]} f_k(x^0)$$

присвоюємо

$$m^* = \max_{k\in[1:K]} f_k(x^0)$$

формуємо множину

$$K_{\max} = \{i \in [1:K]:\ f_i(x^0) = \max_{k\in[1:K]} f_k(x^0)\}$$

4. Нехай маємо деяке x_s – наближення до розв'язку задачі, де $s = 0,1,2,...$

5. Перевіряємо, чи є дане розміщення (x_s) оптимальним хоча б для однієї контрольної точки y_k, де $k \in K_{\max}$. Якщо так, то процес припиняється так як x_s - оптимальний розв'язок, інакше - п.6.

6. Обрана множина розгалужується на дві підмножини:

6.1. Обирається змінна, що ініціює розгалуження. Для цього будується матриця максимумів $C^{\max}$ і знаходиться мінімальний елемент побудованої матриці, якщо такий елемент один, то відповідна змінна обирається такою, що ініціює розгалуження. Якщо ж таких елементів декілька, то виконуються наступні обчислення:

$$\theta_{ij} = \min_{k\neq j} c_{ik}^{\max} + \min_{m\neq i} c_{mj}^{\max} \qquad \max \theta_{ij} = \theta_{i_s j_s}$$

6.2. В одній підмножині цю змінну зафіксовуємо 1, а в іншій – 0.

7. Знаходяться оцінки отриманих підмножин:

7.1. Формується підматриця матриці $C^{\min}$ для кожної з отриманих підмножин, для цього якщо на гілці що веде в дану вершину $x_{ij} = 1$ викреслюємо рядок і стовпчик, а якщо $x_{ij} = 0$ тоді $C_{ij} = \infty$.

7.2. Розв'язуємо угорським алгоритмом задачу оптимального розміщення на отриманих підматрицях.

7.3. Оцінка кожної підмножини має вигляд

$$m(X^l) = \sum_{i,j\in T_l}\sum c_{ij}x_{ij} + \psi_l$$

де ψ_l - оптимум задачі про призначення на підматриці змінних $\overline{C_l}$, T_l – множина пар індексів зафіксованих у відповідній вершині.

8. Порівнюємо отримані оцінки з m^*. Якщо $m(X^l)$ більше дорівнює m^*, множина X^l зондується. Якщо розмірність однієї з отриманих підматриць дорівнює 1 і відповідна їй множина не прозондована, то отримано припустимий розв'язок x^{s+1}, інакше перехід до пункту 12.

9. Знаходиться відповідне значення функції цілі $\max_{k\in[1:K]} f_k(x^l)$. Це є оцінкою відповідної підмножини (множина складається з одного розміщення). Отримується нове m^*, що дорівнює $m^* = \max_{k\in[1:K]} f_k(x^l)$. Обраховується знову множина:

$$K_{\max} = \{i \in [1:K]:\ f_i(x^l) = \max_{k\in[1:K]} f_k(x^l)\}$$

10. Оцінки всіх висячих вершин порівнюються m^*. Ті оцінки, які більше дорівнюють m^* зондуються. Якщо вершин, що висять нема процес припиняється за розв'язок обирається розміщення, що відповідає m^*. Інакше для розгалуження обирається та із вершин, що вісять, яка має мінімальну оцінку і здійснюється перехід у випадку m^* змінило своє значення на поточній ітерації перехід до пункту 4, інакше до пункту 6.

4 Реалізація паралельних обчислень

Точний метод розв'язання мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля на фіксовані посадкові місця реалізовано у вигляді програмного продукту, який розроблено з використанням платформи .NET та мови програмування C# 5.0 та призначений для використання під платформами сімейства Microsoft Windows. Для паралельного виконання обчислень використано клас Parallel .NET Framework 4 та стандартні засоби організації багато потоковості. Рішення програмного продукту містить в собі 3 проекти:

1. Algorithms – містить основний алгоритми, що використовуються для окреміх обрахунків у модулях програми:

   1.1. BranchsAndBounds.cs – алгоритм гілок та меж (основні обчислення програми виконуються в рамках даного алгоритму);

   1.2. HAlgoritm.cs – угорський алгоритм (використовується для відшукання оптимального розміщення для певної конкретної задачі)

2. DataAccessor – містить класи для обробки даних та класи представлення сутностей, які обробляються програмою;

3. Base – проект для запуску програми. Містить форми взаємодії з користувачем та клас для роботи з конфігурацією файлу XML.

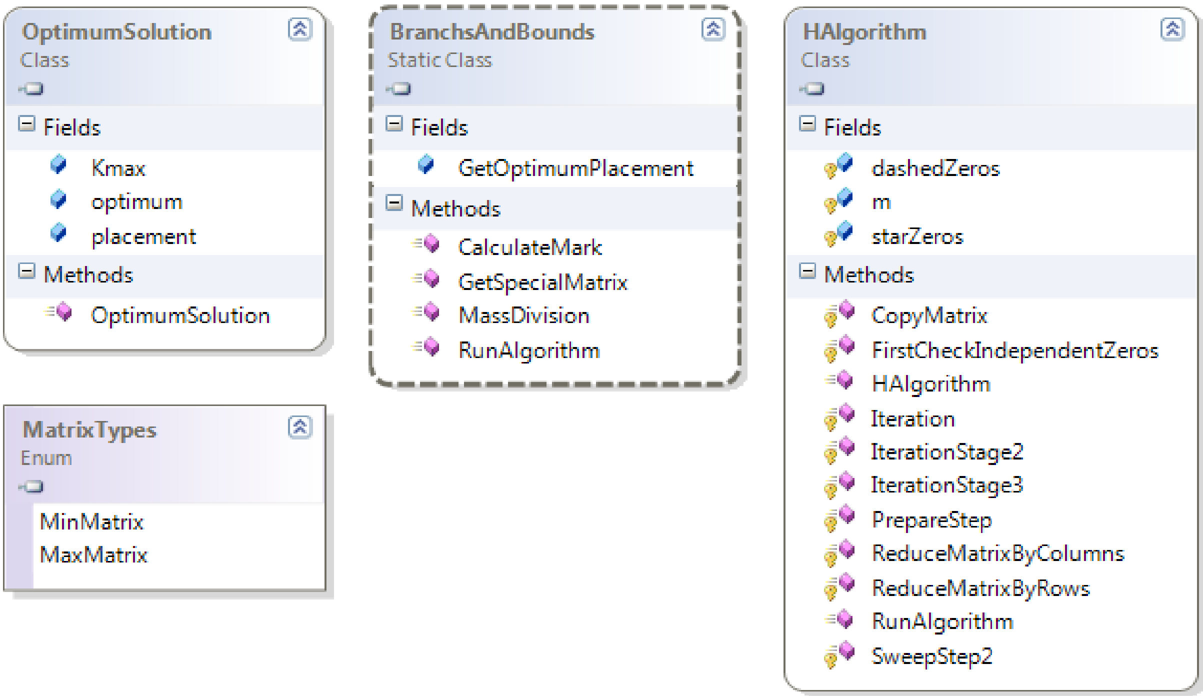

Рис. 1. Ієрархія класів

5 Обчислювальний експеримент

Для проведення обчислювального експерименту використовувався комп'ютер Intel Core i5-4670 з тактовою частотою 3,4 ГГц з об'ємом оперативної пам'яті 8 ГБ.

Експерименту полягав у дослідженні залежності часу розв'язання дискретної мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля на фіксовані посадкові місця від розмірності задачі та кількості використаних процесорів. Випадковим чином генерувалося по 100 задач (K = 10) для кожної розмірності від 5 до 100. Матриця заповнювалась випадковими числами від 1 до 100. Кожна задача розв'язувалася запропонованим методом.

Результати обчислювального експерименту наведено на рис. 2.

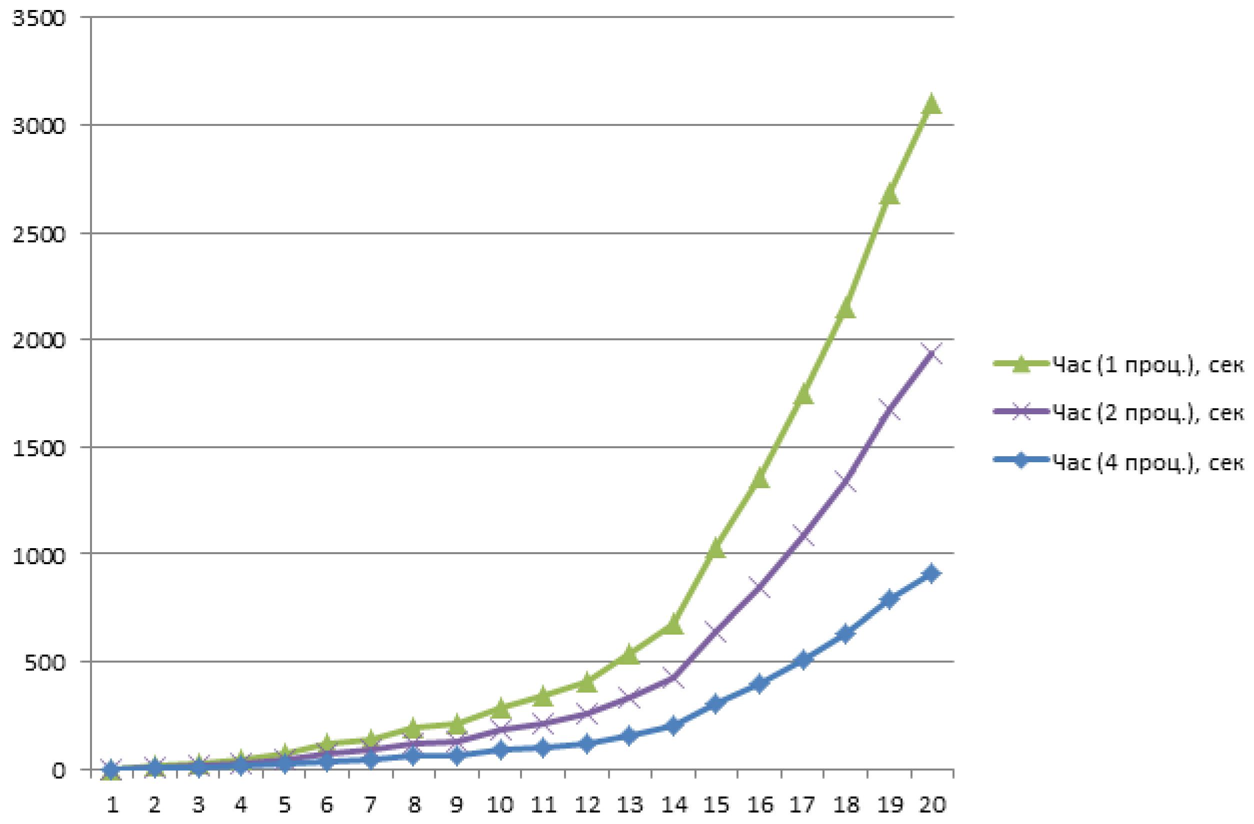

Рис. 2. Залежність часу розв'язання дискретної мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля на задані посадкові місця від розмірності задачі та кількості використаних процесорів

6 Висновки

У статті наведено математичну постановки дискретної мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля на фіксовані посадкові місця та запропоновано точний метод її розв'язання. Для підвищення швидкодії методу використано механізм паралельних обчислень. За допомогою обчислювального експерименту показано, що у випадку використання двох процесорів, у середньому, досягається виграш у 1,6 рази, чотирьох – у 3,4 рази.

Так як застосування паралельних обчислень дозволило підвищити швидкодію методу, у подальшому планується реалізувати алгоритм розв'язання задачі на кластері Інституту кібернетики.

Література

[1] Стоян Ю. Г., Путятин В. П. Оптимизация технических систем с источниками физических полей. – Киев: Наукова думка. – 1988. – 192с.

[2] Яремчук С. І., Бурда Р. В., Матущенко С. С. Алгоритм решения дискретной минимаксной задачи размещения источников физического поля // Кибернетика и системный аналіз №5, 2009, С. 153-163.