

Компьютерное моделирование сложного теплообмена в пакете FreeFem++

А.А. Астраханцева¹, А.Е. Ковтанюк^{1,2}

¹Дальневосточный Федеральный Университет, Суханова 8, Владивосток, Россия
²Институт прикладной математики ДВО РАН, Радио 7, Владивосток Россия

astro4ka_93@mail.ru, kovtanyuk.ae@dvvfu.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача сложного теплообмена в трехмерной области с отражающими границами. Предлагается итерационный алгоритм, основанный на использовании метода конечных элементов. Проводится программная реализация алгоритма в пакете FreeFem++.

Ключевые слова

Радиационно-кондуктивный теплообмен, конвективный перенос тепла, метод конечных элементов, FreeFem++

1 Постановка краевой задачи

Стационарная нормализованная диффузионная модель, описывающая радиационный, кондуктивный и конвективный теплообмен в ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^3$ имеет следующий вид [1]

$$-\alpha \Delta \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta + b \kappa_{\Sigma} \theta^4 = b \kappa_{\Sigma} \varphi, \quad (1)$$

$$-\alpha \Delta \varphi + \kappa_{\Sigma} \varphi = \kappa_{\Sigma} \theta^4. \quad (2)$$

Здесь θ — нормализованная температура, φ — нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям, \mathbf{v} — заданное поле скоростей, и κ_{Σ} — коэффициент поглощения. Постоянные α , b , и α определяются следующим образом:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}, \quad b = \frac{4\sigma n^2 T_{\max}^3}{\rho c_p}, \quad \alpha = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_{\Sigma}},$$

где k — теплопроводность, c_p — удельная теплоемкость, ρ — плотность, σ — постоянная Стефана-Больцмана, n — показатель преломления, T_{\max} — максимальная температура в ненормализованной модели, $\kappa = \kappa_{\Sigma} + \kappa_{\Sigma}$ — коэффициент полного взаимодействия, κ_{Σ} — коэффициент рассеяния. Коэффициент $A \in [-1, 1]$ описывает анизотропию рассеяния, случай $A = 0$ соответствует изотропному рассеянию. Будем предполагать, что функции θ, φ , описывающие процесс сложного теплообмена, удовлетворяют следующим условиям на границе $\Gamma = \partial G$, состоящей из трех частей Γ_1, Γ_2 и Γ_3 . Участок границы Γ_1 представляет собой твердую поверхность области G , Γ_2 и Γ_3 описывают участки втекания и вытекания, соответственно. К уравнениям (1), (2) присоединим следующие граничные условия

$$\theta = \theta_0 \text{ на } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \partial_n \theta = 0 \text{ на } \Gamma_3, \quad (3)$$

$$\alpha \partial_n \varphi + \beta(\varphi - \theta_0^4) = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad \alpha \partial_n \varphi + 0.5\varphi = 0 \text{ на } \Gamma_2 \cup \Gamma_3. \quad (4)$$

Здесь через ∂_n обозначаем производную в направлении внешней нормали. Неотрицательная функция θ_0 , определенная на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и функция β , описывающая, в частности, отражающие свойства границы Γ , являются заданными. Интерес к задачам сложного теплообмена в рассеивающих средах с отражающими границами возникает во многих инженерных приложениях. Значительное число работ посвящено вопросам численного моделирования

[2]-[6]. Теоретический анализ краевых задач, связанных с различными моделями радиационного теплообмена, представлен не так широко. Можно отметить работы [7]-[10], посвященные анализу различных эволюционных задач, учитывающих радиационный теплообмен. Отметим также статью [11], в которой имеется хорошая библиография работ, посвященных сложному теплообмену. В работе предлагается итерационный алгоритм, основанный на методе конечных элементов, для расчета распределения температуры в трехмерной области. Проведены численные эксперименты по нахождению распределения температуры в трехмерном канале.

2 Слабое решение краевой задачи

Обозначим через L^p , $1 \leq p \leq \infty$ пространство Лебега, а через H^s – пространство Соболева W_2^s . Через (\cdot, \cdot) обозначаем скалярное произведение в $L^2(G)$,

$$(f, g) = \int_G f(r)g(r)dr, \quad \|f\|^2 = (f, f).$$

Кроме этого будем использовать пространство

$$V = \{\eta \in H^1(G): \eta = 0 \text{ на } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}$$

с нормой $\|\eta\|_V = (V\eta, V\eta)^{1/2}$.

Определение 1. Пара $\{\theta, \varphi\} \in H^1(G) \times H^1(G)$ называется слабым решением задачи (1)-(4), если

$$\alpha(V\theta, V\eta) + (v \cdot V\theta + b\kappa_\Sigma(\theta^4 - \varphi), \eta) = 0 \quad \forall \eta \in V, \quad (5)$$

$$\alpha(V\varphi, V\psi) + \kappa_\Sigma(\varphi - \theta^4, \psi) + \int_{\Gamma_2} \beta(\varphi - \theta_0^4)\psi d\Gamma + 0.5 \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} \varphi\psi d\Gamma = 0 \quad \forall \psi \in H^1(G) \quad (6)$$

и при этом $\theta = \theta_0$ на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Определение слабого решения необходимо для использования метода конечных элементов на каждом шаге итерационной процедуры, описанной в следующем пункте.

3 Итерационный алгоритм решения задачи сложного теплообмена

Для нахождения решения системы (5), (6) применим метод простой итерации с параметром. В соответствии с которым, начальное приближение для температуры θ обозначим через $\theta^{(0)}$. Затем, подставляя $\theta^{(0)}$ в (6) вместо функции θ , находим решение задачи (6), и обозначим его через $\varphi^{(1)}$. Далее, находим решение задачи (5), соответствующее заданной функции $\varphi^{(1)}$ и обозначим его как $\theta^{(1)}$. Выберем малый положительный параметр q и положим $\theta^{(1)} = q\theta^{(1)} + (1-q)\theta^{(0)}$ в качестве следующего приближения функции θ . Затем, подставляя $\theta^{(1)}$ вместо функции θ в уравнение (6), находим следующее приближение $\varphi^{(2)}$ и т.д. Таким образом, на j -ом шаге мы используем функции $\theta^{(j-1)}$ и $\varphi^{(j)}$ для нахождения следующего приближения функции θ по формуле:

$$\theta^{(j)} = q\theta^{(j)} + (1-q)\theta^{(j-1)}.$$

4 Вычислительный эксперимент

Продемонстрируем работу предложенного итерационного алгоритма, основанного на методе конечных элементов, на следующем вычислительном эксперименте. В качестве области G был взят канал

$$G = \{r = (x_1, x_2, x_3): 0 < x_1 < 25, 0 < x_2, x_3 < 4\}$$

с линейными размерами, выраженными в сантиметрах. Границы при $x_1 = 0$ и $x_1 = 25$ являются соответственно областями втекания и вытекания среды. Грани перпендикулярные плоскости $x_1 = 0$ являются твердыми стенками канала. Скорость движения среды в канале $v = 10$ [см/сек]. Нормализованная температура на твердых стенках равна 1, это соответствует 500°C . Нормализованная температура на входе канала $\theta_0(0, x_2, x_3) = 1 - 0.7(x_2(4-x_2)x_3(4-x_3))^{0.01}$. Все термодинамические характеристики соответствуют воздуху при нормальном атмосферном давлении и температуре 400°C . Коэффициент полного взаимодействия κ был взят равным 0.1 ($\alpha = 3(3)$), коэффициент поглощения $\kappa_\Sigma = 0.01$. Коэффициент β определяется на основе граничных условий Маршака [12] и равен $\varepsilon/2(2-\varepsilon)$ на твердых стенках, где ε - коэффициент испускания [1], взятый равным 0.3.

На рисунке 1 представлены изолинии температурного поля в центральном продольном сечении канала ($x_2 = 2$), соответствующие модели сложного теплообмена (1)-(4) при значении коэффициента испускания $\varepsilon = 0$ (рисунок 1(а)) и $\varepsilon = 1$ (рисунок 1(б)).

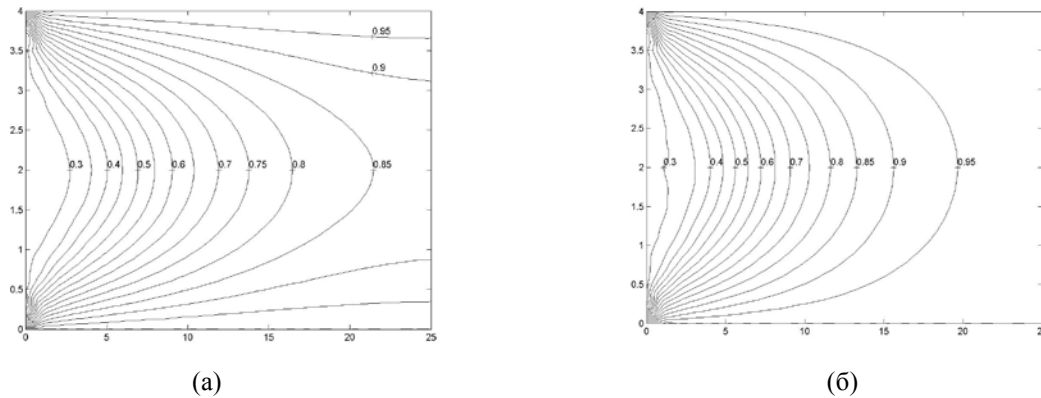


Рисунок 1. Распределение нормализованной температуры в центральном продольном сечении канала, для коэффициента испускания $\varepsilon = 0$ (а) и $\varepsilon = 1$ (б).

Приведенные результаты демонстрируют существенное изменение распределения температуры при изменении испускающих/отражающих свойств стенок канала. При реализации метода конечных элементов для случая высоких температур итерационный процесс сходится существенно медленней. Это требует значительных вычислительных ресурсов. В связи с этим, вопрос повышения производительности алгоритма является весьма актуальным. Реализация метода конечных элементов сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений большой размерности с разреженной матрицей. Существует множество различных библиотек для эффективного решения разреженных систем, в том числе, поддерживающих параллельные вычисления в пакете FreeFem++. Проведён сравнительный анализ эффективности использования библиотек MUMPS и SuperLU для реализации поставленной задачи при использовании до четырёх потоков. В ближайшей перспективе планируется проведение вычислительных экспериментов на вычислительном кластере ДВФУ на большем числе потоков.

5 Благодарности

Авторы выражают благодарность Научному фонду ДВФУ за поддержку представленных исследований.

Литература

- [1] Modest M.F. Radiative Heat Transfer. *Academic Press*. 2003. 822 .
- [2] Siewert S.E. An improved iterative method for solving a class of coupled conductive-radiative heat-transfer problems // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 54(4): 599-605, 1995.
- [3] Thömes G., Pinnau R., Seaid M., Götz T., Klar A.. Numerical methods and optimal control for glass cooling processes // *Trans. Theory Stat. Phys*, 31(4-6): 513-529, 2002
- [4] Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H. Numerical simulations of a coupled conductive-radiative heat transfer model using a modified Monte Carlo method // *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 55: 649-654, 2012.
- [5] Ковтанюк А.Е. Алгоритмы параллельных вычислений для задач радиационно-кондуктивного теплообмена // *Компьютерные исследования и моделирование*, 4(3):543-552, 2012.
- [6] Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu. An iterative method for solving a complex heat transfer problem // *Appl. Math. Comput*, 219: 9356-9362, 2013.
- [7] Амосов А.А. Глобальная разрешимость одной нелинейной нестационарной задачи с нелокальным краевым условием типа теплообмена излучением // *Дифференциальные уравнения*, 41(1): 93-104, 2005.
- [8] Pinnau R.. Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer model by the SP₁-system // *Comm. Math. Sci*, 5(4): 951-969, 2007.
- [9] Druet P.E. Existence of weak solutions to the time-dependent MHD-equations coupled to heat transfer with nonlocal radiation boundary conditions // *Nonlinear Anal. Real World Appl*, 10(5): 2914-2936, 2009.
- [10] Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Y., Botkin N.D., Hoffmann K.-H. The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2013. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.07.054>
- [11] Amosov A.A. Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency // *Journal of Mathematical Sciences*, 164(3): 309-344, 2010.
- [12] Marshak R. Note on the spherical harmonic method as applied to the Milne problem for sphere // *Phys. Rev*, 71(7): 443-446, 1947.