Параллельные численные методы для решения задач разложения функций в степенные ряды

Т.В. Авдеева[1], Л.М. Ильичева[2]

[1] *Каф. математической физики, НТУУ "КПИ", 37 Победы пр., Киев, Украина*
[2] *Каф. информационных технологий, Академия водного транспорта, Фрунзе 9, Киев, Украина*

avdeeva_t1@rambler.ru, m_ilicheva@ukr.net

Аннотация. *Процесс решения вычислительной задачи ускоряется, если применяемый алгоритм делится на информационно-независимые части, и каждая часть вычислений выполняется на отдельном компьютере. Параллельные вычисления позволяют одновременное исполнение нескольких операций по обработке данных. В работе рассматривается методика применения каскадной схемы суммирования при организации параллельных вычислений для решения задач разложения функций в степенные ряды. Приводятся схемы алгоритмов вычисления логарифмической и биномиальной функций, формулы для оценки ускорения, получаемого при использовании параллельного алгоритма по сравнению с последовательным вариантом вычислений.*

Ключевые слова

Граф «операции-операнды», степенной ряд, параллельный алгоритм, каскадная схема.

1 Введение

Процесс решения вычислительной задачи ускоряется, если применяемый алгоритм делится на информационно-независимые части, и каждая часть вычислений выполняется на отдельном процессоре. Тогда необходимые вычисления производятся с меньшими затратами времени. Ускорение ограничивается только числом имеющихся процессоров и количеством "независимых" частей в выполняемых вычислениях. Численные методы в случае многопроцессорных систем следует проектировать как системы параллельных и взаимодействующих между собою процессоров.

2 Основная часть

Под параллельными вычислениями понимают обработку данных, при которой одновременно выполняется несколько машинных операций. Дополнительной формой обеспечения параллелизма является конвейерная реализация обрабатывающих устройств.

При организации параллельных вычислений используются следующие режимы выполнения "независимых" частей задания:

- многозадачный режим (режим разделения времени);
- параллельное выполнение (в один момент времени выполняются несколько команд обработки данных);
- распределенные вычисления [1].

Модель вычислений описывается в виде графа "операции-операнды", приводятся оценки эффективности максимально возможного параллелизма в результате анализа моделей вычислений. При построении модели предполагается, что время выполнения любых вычислительных операций одинаково и равно 1 (в тех или иных единицах измерения). Передача данных между вычислительными устройствами возможна мгновенно без каких-либо затрат времени (что может быть справедливо при наличии общей разделяемой памяти в параллельной вычислительной системе).

Пусть множество операций в исследуемом алгоритме решения вычислительной задачи и существующие между операциями информационные зависимости представлены в виде ациклического ориентированного графа G (V,R), где $V=\{1,...|v|\}$ - множество вершин графа, представляющие выполняемые операции алгоритма, R есть множество дуг графа (при этом дуга r=(i,j) принадлежит графу только если операция j использует результат выполнения операции i).

Вершины без входных дуг используются для задания операций ввода, а вершины без выходных дуг - для операций вывода. Через $\bar{V}$ обозначим множество вершин графа без вершин ввода, а через d(G) - диаметр (длину максимального пути) графа.

Рассмотрим задачу разложения элементарных функций в степенные ряды. Для логарифмической функции справедливо разложение:

$$Ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \qquad (R=1) \qquad (1)$$

На начальном этапе первый процессор вычисляет степени введенного числа, затем на втором процессоре выполняется операция умножения полученного значения на множитель $((-1)^{n-1}/n)$ и проверка точности вычисления (по наперед заданной величине остаточного члена ряда). Затем используется каскадная схема суммирования:

- на первой итерации каскадной схемы – данные разбиваются на пары, для каждой пары вычисляется сумма значений;
- далее все полученные суммы также разбиваются на пары, и снова выполняется суммирование.

Вычислительная схема может быть представлена как граф ($n = 2^k$):

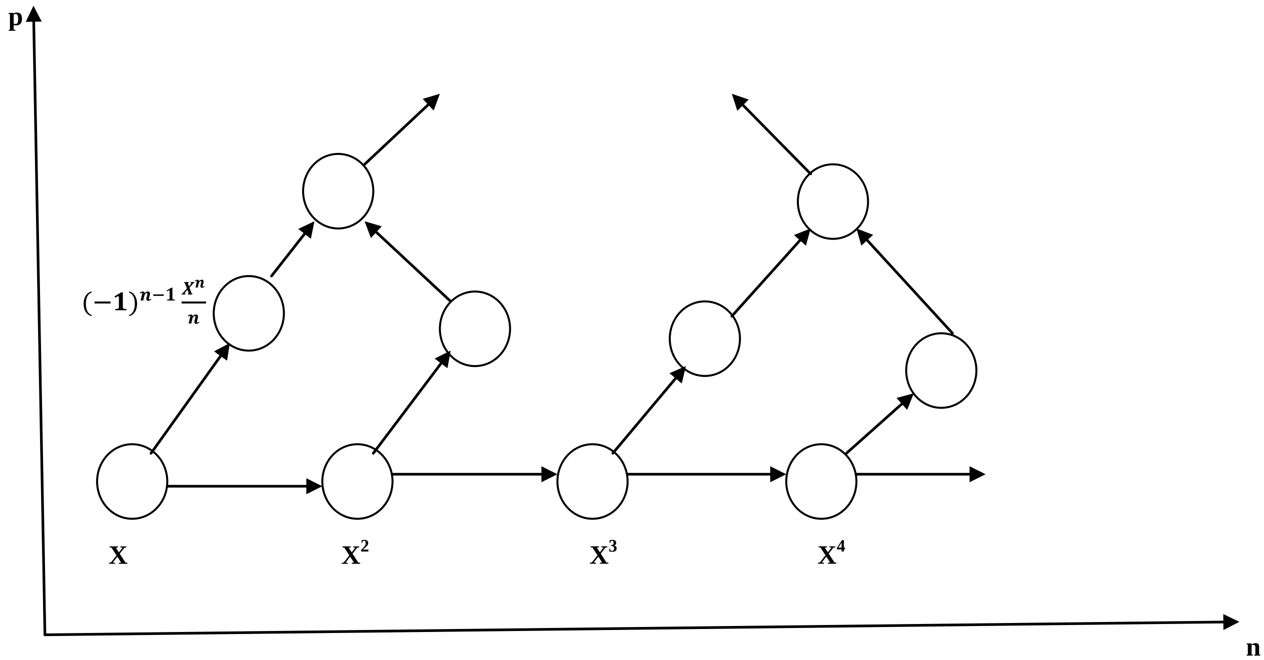

Рис. 1. Каскадная схема алгоритма вычисления логарифмической функции

К общему количеству операций каскадной схемы: $k = \log_2 n$ добавляются 2 начальные итерации. Общее количество итераций при параллельном алгоритме:

$K_{\text{пар}}$ = 2+$\log_2 n$

Общее количество операций при последовательном варианте алгоритма:

$$K_{\text{посл}} = 2(n-1) + \left({}^{n}/_{2}\right) + \left({}^{n}/_{4}\right) + \cdots + 1 = 2(n-1) + n - 1 = 3n - 3$$

Ускорение, получаемое при использовании параллельного алгоритма для “p” процессоров по сравнению с последовательным вариантом выполнения подсчетов:

S_p (n) = $\frac{K_{\text{посл}}}{K_{\text{пар}}} = {}^{(3n-3)}\Big/_{(2+\log_2 n)}$

Эффективность использования параллельным алгоритмом процессоров при решении задачи отражает среднюю долю времени выполнения, в течение которой процессоры задействованы для решения задачи:

$$E_p(n) = {}^{S_p(n)}\!/_{p} = \frac{3n-3}{p(2+\log_2 n)}$$

Наилучшие оценки величин [2]: $S_p(n) = p, E_p(n) = 1$.

В рассматриваемом случае p = 2+n/2. Эффективность использования процессоров уменьшается при увеличении количества используемых значений:

$$\lim_{n\to\infty} E_p \to 0$$

Рассмотрим биномиальное разложение:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n \qquad (R=1) \quad (2)$$

На начальном этапе на одном процессоре вычисляются степени введенного значения, а на другом – произведения вида: m(m-1)(m-2)…(m-n+1)/n! На третьем процессоре вычисляются произведения и выполняется проверка точности вычислений. Затем используется каскадная схема суммирования.

Представим вычислительную схему в виде графа:

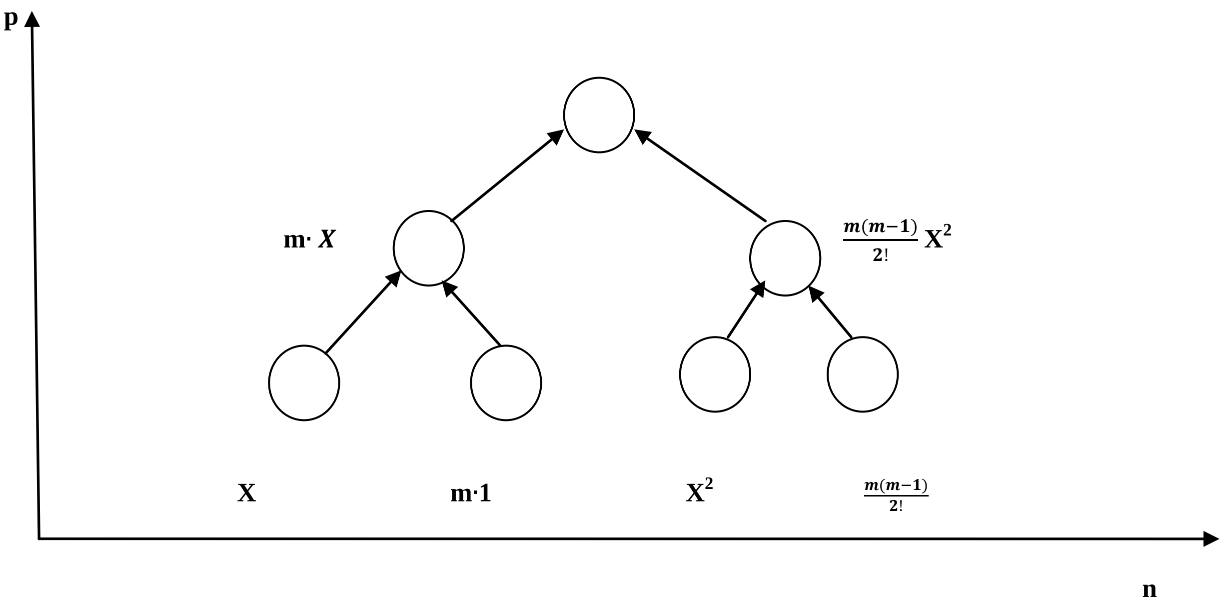

Рис. 2. Каскадная схема алгоритма вычисления биномиальной функции

Выражения для $S_p(n)$ и $E_p(n)$ изменяются незначительно:

S_p (n) = ${}^{(4n-4)}\!/_{(3+\log_2 n)}$; E_p(n) = ${}^{(4n-4)}\!/_{p(3+\log_2 n)}$

где p = 3 + (${}^{n}\!/_{2}$).

Аналогичные алгоритмы предложены для других разложений функций: показательной, гиперболической, тригонометрических и обратных тригонометрических и гиперболических.

3 Заключение

В работе рассматривается методика применения каскадной схемы суммирования при организации параллельных вычислений для решения задач разложения функций в степенные ряды. Приводятся схемы алгоритмов вычисления логарифмической и биномиальной функций, формулы для оценки ускорения, получаемого при использовании параллельного алгоритма по сравнению с последовательным вариантом вычислений.

Литература

[1]. Гергель В.П. Теория и практика параллельных вычислений.6 учебное пособие-М. Ин-т- Универ. Информ. техн., *БИНОМ Лаб. знаний*, 2007.
[2]. Гергель В.П., Стронгин Р.Г. Основы параллельных вычислений для многопроцессорных вычислительных систем. Н. Новгород: *Изд. ННГУ*, 2001.
[3]. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1, *изд. «Наука», Гл. ред. Физико-матем. литерат.*,М.,1969.