

# Вычисление линейных рекуррентных последовательностей в ПЛИС

Сергиенко А.М., Лесик Т.М.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Кафедра вычислительной техники, национальный технический университет Украины «КПИ», Победы, 37,

asr@comsys.kpi.ua

**Abstract.** Two methods for evaluation linear recurrences in FPGA are proposed, which provide the proper stability of computations. The first one can be used for evaluation sequences of polynomial values. The second one uses the property of rational fraction to represent the exact value of the twiddle factor for making the recursive DFT to be stable. These methods were proven in FPGA, and show the satisfied results.

## Keywords

SDF, FPGA, DSP, sliding DFT, retiming, folding, polynomial

## 1 Введение

Последовательность  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  называют линейной рекуррентной последовательностью  $k$ -го порядка, если она получена при вычислении рекуррентной формулы с заданными коэффициентами  $a_j$ :

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_k u_{n-k} + x_n, \quad (1)$$

где  $u_{-1}, u_{-2}, \dots, u_{-k}$  – начальный набор данных (начальное состояние),  $x_n$  – некоторые входные данные. Рекуррентная формула (1) используется в компьютерах для минимизации сложности вычислений. Наиболее известные примеры формулы (1) – арифметическая и геометрическая прогрессии, последовательность Фибоначчи [1].

После применения  $z$ -преобразования к отношению (1) получаем передаточную функцию

$$H(z) = \frac{u(z)}{x(z)} = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_k z^{-k}}. \quad (2)$$

Здесь полином комплексной переменной  $z$  определяет стабильность вычислений. Если все корни  $z_{0i}$  этого полинома попадают в круг единичного радиуса, т.е.  $|z_{0i}| \leq 1$ , то вычисления отношения (1) устойчивы.

Цифровые фильтры с бесконечной импульсной характеристикой и авторегрессивные фильтры обычно вычисляются с использованием рекуррентной формулы (1). Условие их стабильности обеспечиваются надлежащим выбором коэффициентов  $a_j$ , которые удовлетворяют строгому неравенству  $|z_{0i}| < 1$  [2].

Существуют алгоритмы, основанные на (1), для которых условие стабильности – критическое, т.е.  $|z_{0i}| = 1$ . Это алгоритм рекурсивного дискретного преобразования Фурье (ДПФ), алгоритм Герцеля [2], рекурсивное дискретное косинусное преобразование [3], вычисление полинома Чебышева [4], интегрирование экспоненциальной функции [5].

В этих алгоритмах ошибки округления быстро накапливаются, особенно если коэффициенты  $|a_i| > 1$ , порядок формулы  $k > 2$ , а члены последовательности  $u_i$  – нецелые. Поэтому следует принимать меры, чтобы обеспечить надлежащий уровень точности таких вычислений. Для этого число  $n$  повторений рекурсии ограничивают сотнями или десятками, существенно увеличивают разрядность операндов, часто используют представление данных с плавающей запятой двойной точности.

Программируемые логические интегральные схемы (ПЛИС) обеспечивают реализацию сложных целочисленных вычислений с высокими тактовыми частотами. При этом возможно наращивание разрядности операндов в ПЛИС до сотен и тысяч бит. Поэтому целесообразно использовать ПЛИС для вычислений рекуррентных последовательностей с критическим условием стабильности.

В данной работе показаны два способа реализации в ПЛИС рекуррентных вычислений с критической стабильностью. Первый способ позволяет эффективно вычислять последовательности полиномов, второй – выполнять рекурсивное ДПФ.

## 2 Рекуррентная формула последовательности полиномов

Широко известна рекуррентная формула для вычисления квадратов членов арифметической прогрессии:

$$u_n = 3u_{n-1} - 3u_{n-2} + u_{n-3}. \quad (3)$$

Например, для вычисления ряда квадратов натуральных чисел, начиная с  $u_3 = 16$ , следует применить начальный набор данных:  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 4$ ,  $u_2 = 9$ . В общем случае, формула для вычисления чисел  $m$ -1-й степени выражается через биномиальные коэффициенты [1]:

$$u_n = \binom{m}{1} u_{n-1} - \binom{m}{2} u_{n-2} + \dots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m} u_{n-m}. \quad (4)$$

У формулы (4) есть ряд полезных свойств. Сумма всех коэффициентов в (4), взятых с соответствующими знаками, равна единице. Кроме того, все корни полинома в (2) для формулы (4) равны  $z_{0i} = 1$ . Это означает критическую стабильность ее вычислений.

Но эта стабильность может быть достигнута намного проще, чем для других рекуррентных формул. Вследствие того, что все коэффициенты в (4) – целые числа, при достаточной разрядности операндов всегда получаются точные результаты. Так как коэффициенты в (4) – сравнительно небольшие целые числа, умножение на них можно заменить на последовательность сложений сдвинутых влево операндов. Так, например, вычисление  $3u_{n-1}$  реализуется как  $2u_{n-1} + u_{n-1}$ . Эти свойства служат для эффективного вычисления (4) в ПЛИС при достаточно большой разрядности операндов.

Формула (4) также может использоваться для вычисления последовательностей полиномов. В этом случае начальный набор данных  $u_{-1}, u_{-2}, \dots, u_{-m}$  должен быть рядом точных значений полинома степени  $m-1$ . Это свойство можно проверить, если представить последовательность полиномов как комбинацию последовательностей степеней чисел.

В [6] предложено использовать характеристику (2) с биномиальными коэффициентами  $a_i$  в фильтрах, предназначенных для обнаружения периодических сигналов специальной формы, а также для генерации таких сигналов.

## 3 Рекурсивное ДПФ

Рекурсивное ДПФ – это алгоритм вычисления ДПФ с минимизированной сложностью [2]. Передаточная функция  $k$ -го канала  $N$ -точечного рекурсивного ДПФ равна

$$H_k(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}W^k}, \quad (5)$$

где  $W^k = e^{j2\pi k/N} = \cos\theta + j\sin\theta$  является комплексным вращающим коэффициентом.

По сравнению с алгоритмом быстрого преобразования Фурье рекурсивное ДПФ позволяет вычислить ДПФ для любого значения длины преобразования  $N$ . Для ограниченного числа каналов преобразования объем аппаратных затрат или сложность вычисления оказываются небольшими. Рекурсивное ДПФ – это скользящее ДПФ, т.е. оно выдает результат преобразования для каждого нового входного отсчета  $x_n$ . Это свойство позволяет следить за спектром сигнала в реальном времени.

Функция (5) представляет модель резонатора с частотой резонанса  $\theta = 2\pi k/N$ . Корень знаменателя (5) равен  $|z_0| = 1$ . Поэтому рекурсивное ДПФ имеет критическую стабильность и большие ошибки вычислений. Кроме того, необходимо, чтобы  $|W^k| = 1$ . Однако для обеспечения стабильности вычислений, как правило, этот коэффициент по модулю делают немного меньше чем единица, т.е.  $|W^k| < 1$  [2].

В соответствии со знаменателем формулы (5), рекуррентные формулы для ДПФ:

$$Y_{R(i+1)} = Y_{Ri} \cdot \cos \theta - Y_{Ii} \cdot \sin \theta + X_{Ri}; \quad (6)$$

$$Y_{I(i+1)} = Y_{Ii} \cdot \cos \theta + Y_{Ri} \cdot \sin \theta + X_{Ii},$$

где  $X_i = X_{Ri} + jX_{Ii} = X'_i - X'_{i-N}$  – отсчеты, полученные как разность входного сигнала  $X'_i$  и сигнала  $X'_{i-N}$ , задержанного на  $N$  циклов;  $Y_i = Y_{Ri} + jY_{Ii}$  – отсчеты скользящего спектра с частотой  $\theta$ .

При выполнении точных расчетов ДПФ должно удовлетворяться равенство Пифагора:

$$z^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1. \quad (7)$$

Решение задачи Пифагора состоит в нахождении всех прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами, т.е. в решении диофантового уравнения:

$$s^2 + c^2 = e^2. \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) показывают, что для некоторых углов  $\theta'$  поворачивающие коэффициенты равны рациональным дробям:

$$\sin \theta' = s/e; \cos \theta' = c/e. \quad (9)$$

Задача Пифагора может быть решена рядом способов [7]. В результате, коэффициенты  $\sin \theta'$ ,  $\cos \theta'$  представимы в компьютере точными значениями рациональных дробей. Например, коэффициенты для  $\theta' \approx 2\pi/128$ , удовлетворяющие (7), равны  $\cos \theta' = 304/26585$  и  $\sin \theta' = 26533/26585$  с ошибкой представления угла  $\varepsilon = \theta - \theta' = 0,001^\circ$ .

В работе [8] показано, что такое представление коэффициентов обеспечивает ряд преимуществ в программах обработки графических данных. При этом операции аффинных преобразований изображений выполняются с использованием целочисленной арифметики.

В работе [9] показана высокая эффективность вычислений в ПЛИС с помощью рациональных дробей. Над рациональными дробями определен сравнительно простой набор операций. Умножение и деление  $a/b$  на  $c/d$  равно  $a \cdot c / (b \cdot d)$ , и  $b \cdot d / (a \cdot c)$ , соответственно. Следует отметить, что собственно деление числителя на знаменатель не выполняется. Результат сложения рациональных дробей равен  $(a \cdot d + b \cdot c) / (b \cdot d)$ .

Сравнивая сложность операций с рациональными дробями со сложностью операций целочисленной арифметики, нужно принять во внимание, что при одинаковой точности представления чисел разрядность числителя и знаменателя – вдвое меньше, чем для целых чисел. В результате, сложность аппаратного сумматора дробей приблизительно равна сложности умножителя целых чисел, а сложность умножителя дробей – вдвое меньше чем сложность умножителя целых чисел.

Недостаток арифметики рациональных дробей состоит в том, что необходимо увеличивать разрядность числителей и знаменателей после их перемножения. Но этот недостаток минимизируется при нормализации и округлении результирующих дробей.

Принимая во внимание свойство коэффициентов (7), целесообразно вычислять формулы (6) с использованием представления коэффициентов в виде рациональных дробей. Это минимизирует нестабильность вычислений, которая возникает после многократного повторения вычислений по формулам (6).

Представим комплексный операнд  $Y_i$  рациональными дробями  $Y_{Ri} = a_i/d_i$ ;  $Y_{Ii} = b_i/d_i$ . Также допустим, что входные данные – действительные целые числа  $x_i$ , смасштабированные сдвигом вправо на  $s$  разрядов. Тогда выражения (6) с учетом (9) представляются как:

$$\begin{aligned} d_{i+1} &= d_i \cdot e; \\ a_{i+1} &= a_i \cdot c - b_i \cdot s + 2^{-s} x_i \cdot d_{i+1}; \\ b_{i+1} &= a_i \cdot s + b_i \cdot c. \end{aligned} \quad (10)$$

Как видим, вычисление скользящего ДПФ с рациональными дробями требует всего на две операции умножения больше, чем вычисления с целыми числами. Зато при этом обеспечивается существенно более высокая точность вычислений, что будет показано ниже.

## 4 Процессоры для вычисления линейных рекуррентных последовательностей

## 4.1 Процесор для вычисления полиномиальных функций

Представление рядом Тейлора – распространенный способ аппроксимации гладкой функции. Ряд Тейлора, содержащий до  $m$  членов, представляется полиномом степени  $m - 1$ . Например, функция арктангенса аргумента  $x$  приближенно представляется сокращенным рядом Тейлора:

$$\arctg x \approx f(x) = x - x^3/3 + x^5/5.$$

После масштабирования этой функции получаем

$$f(x) = 15x - 5x^3 + 3x^5.$$

Тогда рекуррентное вычисление этой функции реализуется по формуле (4) при  $m = 6$ :

$$f(dn) = u_n = 6u_{n-1} - 15u_{n-2} + 20u_{n-3} - 15u_{n-4} + 6u_{n-5} - u_{n-6}. \quad (11)$$

Пусть необходимо вычислить функцию  $f(x)$  для аргумента  $x$  с шагом  $d = 2^{-k}$ , начиная с 0. Тогда начальные данные для (11) равны

$$u_i = f(di), i = 0, 1, \dots, m - 1. \quad (12)$$

Очевидно что, если выбрать разрядность данных аппаратного вычислителя для формулы (11) больше, чем  $5k + 8$ , то результаты вычисления  $f(x)$  будут безошибочны для  $x < 1$ .

Такой вычислитель для  $k = 10$  был сконфигурирован в ПЛИС Xilinx Virtex-5. Была выбрана разрядность операндов 58. Умножение на коэффициенты в (11) реализовано схемой в виде дерева сумматоров. Вычислитель занимает 159 CLB slices и выдает результирующие отсчеты функции  $f(x)$  с частотой 125 МГц.

В общем случае, спецвычислитель, реализующий формулу (4) порядка  $m$  может вычислять любую функцию, представленную полиномом степени  $m - 1$ . Необходимо лишь получить точные начальные данные (12). Чтобы вычислить  $f(x)$  в  $2^k$  равноотстоящих точек с нулевой или минимизированной ошибкой, необходима разрядность данных, равная  $m \cdot k$ .

Опытным путем было установлено, что для вычисления произвольного полинома пятой степени в 100 точках с максимальной ошибкой 0.1% разрядность операндов должна быть больше, чем 40. Причем эта ошибка существенно зависит от точности вычисления начальных данных по формуле (12).

## 4.2 Процесор скользящего ДПФ

Демодулятор сигналов с многочастотной модуляцией (DTMF) широко используются телекоммуникационных системах. Стандартный декодер DTMF-сигналов содержит восемь узкополосных каналов. Причем для повышения надежности кодирования центральные частоты  $f_i$  каналов не имеют взаимных кратных гармоник. Поэтому такой декодер нецелесообразно реализовать с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье. Каналы декодера обычно реализуют в виде ДПФ длины  $N_i$ , которая различна для каждого канала. Часто декодер DTMF-сигналов реализуют как банк фильтров Герцеля [10,11]. Основным недостатком фильтра Герцеля состоит в большом уровне накапливаемых ошибок вычислений вследствие его критической стабильности.

В работе [12] предложено реализовать декодер DTMF-сигналов с помощью скользящего ДПФ, используя рациональные дроби для точного задания вращающихся коэффициентов в виде (9). Эти коэффициенты, приведенные там же для частот сигнализации в стационарных телефонных сетях, имеют 16-разрядные числитель и знаменатель и обеспечивают ошибку представления угла  $\varepsilon < 0,025\%$ , которая намного меньше необходимой.

Можно существенно упростить процесор скользящего ДПФ, если использовать коэффициенты (9) такие, что знаменатель  $e$  ненамного меньше, чем  $2^k$ , а также реализовать сброс состояния процесора после каждого измерения гармоник во входном сигнале. Тогда реальная и мнимая части результатов будут равны  $a_M/d_M = a_M \cdot K_{\Pi}$  и  $b_M/d_M = b_M \cdot K_{\Pi}$ , соответственно, где  $M$  – период измерения, для стандартных DTMF-сигналов  $M=106$ ;  $K_{\Pi}$  – коэффициент, зависящий от  $M$  и знаменателя  $e$ . Полученные вращающиеся коэффициенты для стандартных DTMF-сигналов и соответствующие коэффициенты  $K_{\Pi}$  и относительная ошибка представления угла  $\varepsilon$  показаны в таблице 1.

Граф синхронных потоков данных (ГСПД) скользящего ДПФ, соответствующий (10) показан на рис.1. В нем прямоугольники представляют конвейерные задержки. Буфер FIFO имеет регулируемую задержку, равную  $N_i$  циклов для  $i$ -го канала. Граф получен, сворачиванием десяти одинаковых графов скользящего ДПФ. Поэтому он соответствует восьми параллельным каналам DTMF, у которых установлены различная частота  $\theta_i$  и период  $N_i$ .

Процесор скользящего ДПФ имеет структуру, совпадающую с ГСПД на рис.1. За восемь тактов синхросерии обрабатывается один отсчет входного сигнала, т.е. выполняется один период обработки. Каждые 106 периодов обработки переменные  $a_i$ ,  $b_i$  обнуляются, а  $d_i$  – устанавливаются в единичное значение. Операнды  $a_{105}$ ,  $b_{105}$  – это результаты, отличающиеся от истинных результатов в  $K_{П}$  раз (см. табл.1). Коррекция результатов с учетом  $K_{П}$  выполняется в устройстве принятия решения декодера DTMF.

Табл.1. Вращающие коэффициенты для стандартных DTMF-сигналов

$\theta_i$ , Гц	$x$	$y$	$z$	$K_{П}$	$\varepsilon$ , %
697	17052	27875	32677	1,342	0.29
770	36936	53273	64825	3,175	0,25
852	40488	51025	65137	1,912	0.24
941	10948	12045	16277	2,004	-0.18
1209	26404	19197	32645	1,141	-0.26
1336	56576	32457	65225	3,040	0.06
1477	14980	6549	16349	1,675	-0.12
1633	31320	9361	32689	1,292	-0.17

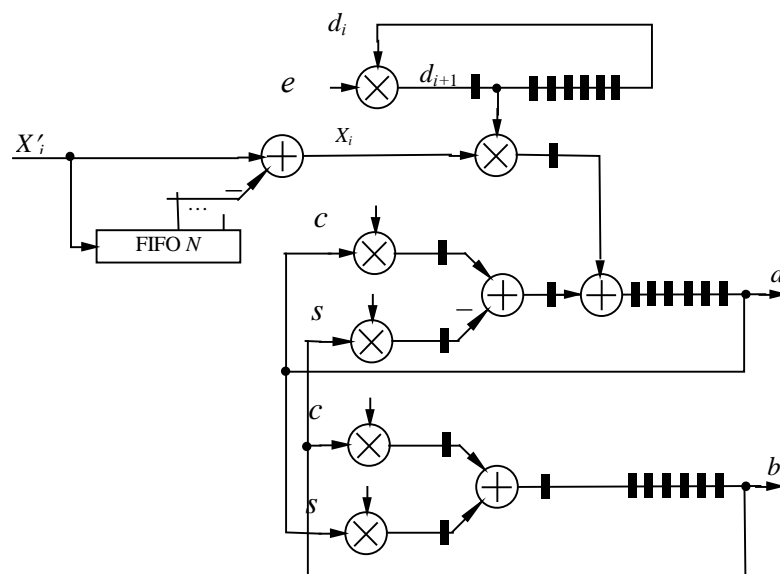


Рис.1. ГСПД восьми каналов скользящего ДПФ

Процесор скользящего ДПФ был сконфигурирован в ПЛИС Xilinx xc4vsx35-12. Разрядность операндов принята равной 18 бит. Процессор занимает всего 300 CLB slices и 6 блоков DSP48, т.е. его аппаратные затраты вдвое меньше, чем у процессора, описанного в [12]. Тактовая частота достигает 245 МГц, что на 23% выше, чем у процессора в [12]. Процессор может обрабатывать входные сигналы с частотой дискретизации до 30 МГц.

Модель процессора была протестирована при вычислении ДПФ для  $N = 128$  и  $\theta = 2\pi/N$ . Ошибка оценки амплитуды гармоники сигнала, состоящего из смеси гармоник и шума составила 10 – 26 %. При таких же условиях ошибка алгоритма ДПФ с вычислениями с плавающей запятой составила 4 – 5%.

## 5 Заключение

Предложены два способа реализации линейных рекуррентных вычислений ПЛИС, которые обеспечивают необходимую стабильность вычислений. Первый способ, благодаря свойствам рекуррентной формулы с биномиальными коэффициентами, эффективно используется для вычисления последовательности многочленов. Второй способ на основе точного представления вращающихся коэффициентов делает возможной практическую реализацию устойчивого рекурсивного ДПФ. Предложенные способы были проверены при конфигурировании спецпроцессоров в ПЛИС. Способы могут быть также использованы при программной реализации алгоритмов.

## Список литературы

- [1] R.L.Graham, D.E.Knuth, O.Patashnik: Concrete Mathematics. *Addison-Wesley Pub.* 1990. 625p.
- [2] А.В.Оппенгейм, Р.В.Шафер: Цифровая обработка сигналов. *М.: Связь.* 1979. 416 с.
- [3] J.-F.Yang, C.-P.Fan: Compact Recursive Structures for Discrete Cosine Transform. *IEEE Trans. CAS—II: Analog and Digital Signal Processing.* 47(4): 314–321. 2000.
- [4] J. Arndt: Matters Computational. Ideas, Algorithms, Source Code. *Springer.* 2011. 966p.
- [5] W.H.Press, S.A.Teukolsky, H.A.Bethe, W.T.Vetterling, B.P.Flannery: Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing. *Cambridge Univ. Press.* 2007. 1235 p.
- [6] Д.А.Никитин: Приложения алгоритма синтеза рекурсивных цифровых фильтров по импульсной характеристике. *Цифровая обработка сигналов.* 4:8 – 15. 2009.
- [7] T.Koshy: Elementary Number Theory with Applications. *Academic Press.* 2007. 773 p.
- [8] J.Canny, B.Donald, E.K.Ressler: A Rational Rotation Method for Robust Geometric Algorithms. *ACM 8-th Annual Computational Geometry. Berlin, Germany.* 6: 251–260. 1992.
- [9] А.М.Сергиенко: Применение рациональных дробей в специализированных вычислителях. *Вісник НТУУ «КПІ»: «Інформатика, управління та обчислювальна техніка»:* зб. наук. праць. 50: 74-77. 2009.
- [10] C.J.Chen: Modified Goertzel Algorithm in DTMF Detection Using the TMS320C80. *Texas Instruments Inc. Application Report. SPRA066. USA.* June. 13 p. 1996.
- [11] U. Meyer-Baese: Digital Signal Processing with Field Programmable Gate Arrays. *Springer.* 2007. 774 p.
- [12] А.М.Сергиенко, В.М.Мелковська: Спосіб демодуляції сигналів з багаточастотною модуляцією. *Вісник НТУУ «КПІ»: «Інформатика, управління та обчислювальна техніка»:* зб. наук. праць. 48: 82–84. 2008.