

Параллельные вычисления максимальных контурных SH-напряжений на системе отверстий некруговой формы в бесконечной упругой среде

Панченко Б.Е., Сайко И.Н.

Институт кибернетики им В.М. Глушкова НАНУ

igor_sayko@mail.ru

Аннотация. Предложен параллельный алгоритм численного решения стационарных задач теории упругости на примере взаимодействия SH-волн с системой отверстий произвольного поперечного сечения. Схема параллельных вычислений позволила исследовать ситуации с большим числом отражающих отверстий. Приведены новые численные результаты.

Ключевые слова

Интегральные уравнения, схема параллельных вычислений, дифракция SH-волн, система отверстий

1 Введение

В настоящей работе исследован параллельный алгоритм [1] решения интегральных уравнений, моделирующих дифракцию SH-волн на системах отверстий некруговой формы в бесконечной изотропной среде [2,3].

Для определения высокоточных значений максимальных контурных касательных напряжений исследован алгоритм последовательных приближений смещений точек коллокации. Для некоторых модельных задач приведены уникальные таблицы значений максимальных контурных напряжений с точностью до 10 знаков.

2 Постановка задачи

В неограниченной изотропной среде рассмотрено m бесконечных вдоль оси OZ полых цилиндров, поперечные сечения которых ограничены замкнутыми (без общих точек) контурами L_j , $j = \overline{1, m}$ типа Ляпунова. Пусть L – совокупность указанных контуров и пусть положительное направление выбрано так, что при движении вдоль L область D остается слева (рис. 1).

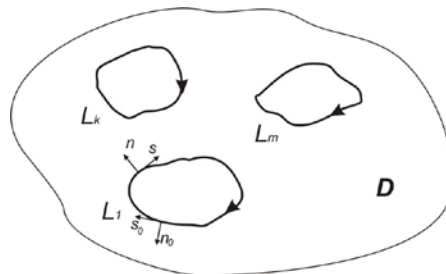


Рис. 1

Предположим, что источники внешнего поля перемещений W_0 размещены в области D . В качестве такого источника может быть набегающая на цилиндры из бесконечности монохроматическая SH-волна, нормаль к фронту которой составляет угол ψ с осью OX ($\tau = \text{const}$),

$$W_0 = \tau e^{-i\gamma_2(x \cos \psi + y \sin \psi)}, \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2} \quad (1)$$

или гармонический источник интенсивности P , сосредоточенный в точке $M_0(x_0, y_0)$ и порождающий поле перемещений [8]

$$W_0 = -\frac{P}{\mu} \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_2 r), r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (2)$$

Здесь c_2 – скорость волны сдвига, ω – частота колебаний, μ – модуль сдвига, i – мнимая единица ($i^2 = -1$),

$H_n^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля первого рода n -го порядка, зависимость от времени выражается множеством $e^{-i\omega t}$.

В результате взаимодействия приходящей волны с отверстиями возникает дифрагированное волновое поле. Обозначим W_1 амплитуду отраженной волны сдвига. Тогда общее поле амплитуд перемещений равно $W = W_0 + W_1$. Неизвестная функция W_1 должна удовлетворять однородному уравнению Гельмгольца в области D с волновым числом γ_2 :

$$\Delta W_1 + \gamma_2^2 W_1 = 0, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (3)$$

а также условием излучения на бесконечности типа Зоммерфельда [2].

На границе отверстий L определяются касательные напряжения $\sigma_{sz} = \tau_s e^{-i\omega t}$, $\sigma_{nz} = \tau_n e^{-i\omega t}$. В случае антиплоской деформации

$$\tau_s = \mu \frac{\partial W}{\partial s}, \tau_n = \mu \frac{\partial W}{\partial n}, \quad (4)$$

где s – положительная касательная, n – нормаль в точке $\zeta = \xi + i\eta \in L$ (рис.1).

Пусть $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$ – точка L , в которой мы будем удовлетворять граничные условия. Так как L – граница отверстий, то, очевидно,

$$\frac{\partial}{\partial n_0} (W_0 + W_1)|_L = 0, \quad (5)$$

где n_0 – нормаль к L в точке $\zeta_0 \in L$.

Таким образом, задача дифракции волны сдвига (1) или (2) на системе отверстий в неограниченной изотропной среде сводится к решению краевой задачи (3), (5) при выполнении дополнительных условий излучения на бесконечности.

3 Метод решения

Выпишем из [4] интегральное уравнение, моделирующее решение поставленной задачи. Искомое интегральное уравнение относительно неизвестной функции $f(s)$ имеет вид:

$$\frac{1}{2} f(s_0) + \int_L f(s) E(s, s_0) ds = K_n(s_0), n = 1, 2, \quad (6)$$

$$E(s, s_0) = \gamma_2 H_1^{(1)}(\gamma_2 r_0) \sin(\alpha_0 - \varphi_0), \zeta_0 - \zeta = r_0 e^{i\alpha_0},$$

$$K_1(s_0) = i\gamma_2 W_0(s_0) \sin(\psi - \alpha_0), K_2(s_0) = -\frac{P}{\mu} \gamma_2 H_1^{(1)}(\gamma_2 r_{10}) \sin(\alpha_{10} - \varphi_0),$$

$$\zeta_0 - z_0 = r_{10} e^{i\alpha_{10}}, z_0 = x_0 + iy_0.$$

Здесь функции $K_1(s_0)$ и $K_2(s_0)$ отвечают случаям (1) и (2) соответственно.

Нетрудно убедиться [2], что интегральное уравнение (6) является уравнением Фредгольма второго рода, которое, как известно, разрешимо и имеет единственное решение в классе функций, непрерывных по Гельдеру.

4 Дискретизация задачи

Аналогічно [4], представимо невідому щільність $f(s)$ інтегрального рівняння (6) як сукупність функцій $f_j(s_j)$, визначених на контурах L_j , $j = \overline{1, m}$. Тоді (6) перетворюється в систему інтегральних рівнянь Фредгольма 2-го роду

$$\frac{1}{2} f_k(s_{k0}) + \sum_{j=1}^m \int_L f_j(s_j) E(s_j, s_{k0}) ds_j = K_n(s_{k0}), k = \overline{1, m}, n = 1, 2. \quad (7)$$

Здесь дугові координати s_j і s_{k0} стосуються до точок $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j \in L_j$ і $\zeta_{k0} = \xi_{k0} + i\eta_{k0} \in L_k$ відповідно.

Чисельна реалізація інтегральних рівнянь (7) проводилась методом механічних квадратур [2]. Вводилась параметризація контура L_j з допомогою співвідношень

$$\zeta_j = \zeta_j(\beta), \zeta_{j0} = \zeta_{j0}(\beta_0), 0 \leq \beta, \beta_0 < 2\pi, \quad (8)$$

причому $\zeta_j(0) = \zeta_j(2\pi)$. Інтегральне рівняння, що відповідає контуру L_k , задовольнялось в вузлах виду $\beta_l = \pi(2l-1)/n_k$ ($l = \overline{1, n_k}$) і зводилось до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень функції $f_j(\beta)$ в вузлах виду $\beta_p = \pi(2p-1)/n_j$ ($p = \overline{1, n_j}$), де n_j - число точок розбиття контура L_j . Внеінтегральні значення $f_k(\beta_l)$ виражались з допомогою інтерполяційних поліномів Лагранжа через шукані значення $f_k(\beta_p)$. Якщо n_k - нечетно, вираження мають вигляд [2]:

$$f_k(\beta_l) = \frac{1}{n_k} \sum_{p=1}^{n_k} (-1)^{n_k+p} f_k(\beta_p) \operatorname{cosec} \frac{\beta_l - \beta_p}{2}, \quad (9)$$

Таким чином, при чисельній реалізації системи інтегральних рівнянь (7) задача зводиться до рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь з $N = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ невідомими.

5 Схема вичислень

Як показано на рис. 2, даний метод в обчислювальному сенсі зводиться до обходу кожного контура по точкам колокації внеінтегральної змінної ζ_{k0} і одночасному ж обходу кожного контура по аналогічним або іншим вузлам змінної інтегрування ζ_k .

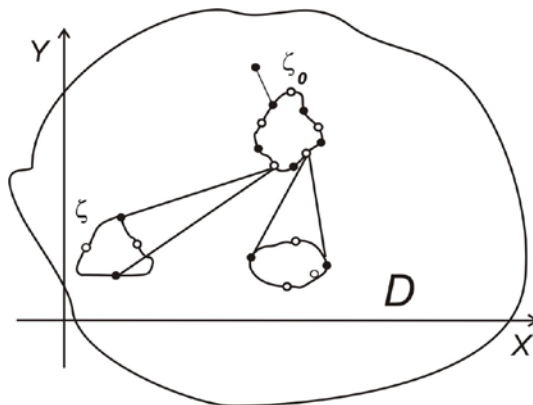


Рис. 2

Таким чином, змінна ζ_{k0} формує рядки матриці СЛАУ, а змінна ζ_k - її стовпці. Діагональні елементи матриці відповідають коефіцієнтам системи, обчисленим в вузлах загальних для ζ_{k0} і ζ_k отворин. Інші коефіцієнти обчислюються так, що значення ζ_{k0} належать множині точок колокації з одних контурів, а значення змінних інтегрування ζ_k - з інших.

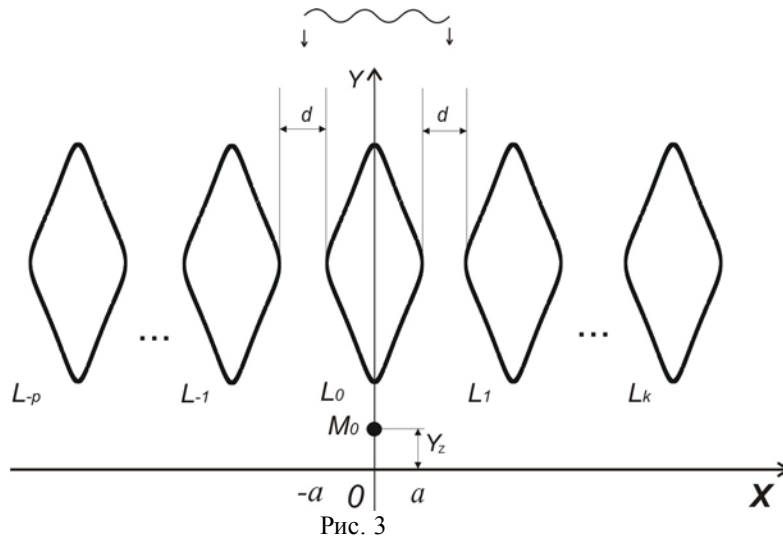
Найбільш економним з точки зору витрат часу і ресурсів пам'яті є процес обчислення коефіцієнтів системи лінійних рівнянь, чисельне рішення СЛАУ і обчислення шуканих характеристик. Для паралельного формування матриці СЛАУ обчислювальний алгоритм зводиться до двох

основним процедурам. Первая формирует массив параметрических координат контуров всех отверстий, который является своеобразной базой данных для формирования клонов. При этом для обеспечения равномерной загрузки хоста кластерной системы исходный массив дробится пропорционально числу используемых процессоров.

Вычислительный процесс решения СЛАУ распараллеливается согласно [4,5]. Параллельное вычисление итоговых искомым характеристик осуществляется путем подстановки массивов значений неизвестных функций $f_k(\beta_p)$ в представление [4] аналогично процедурам формирования матрицы СЛАУ.

6 Численные результаты

С целью исследования сходимости построенного алгоритма рассмотрим случай нормального падения ($\psi=\pi/2$) волны сдвига (1) на систему ромбических отверстий (со скруглениями точек возврата), расположенных вдоль одной линии на одинаковом расстоянии d один от другого (рис. 3).



Используем известные [6] параметрические уравнения для задания основного контура L_0 :

$$\xi(\beta) = b \sin \beta - v \sin 3\beta, \quad \eta(\beta) = a \cos \beta + v \cos 3\beta, \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi, \quad (10)$$

где при $v = 0.14036$ контур имеет вид ромба со скругленными точками возврата. А в случае $v = 0$ контур имеет эллиптическую форму. Остальные контуры для простоты будем располагать симметрично относительно оси Y. В этом случае рассматриваемая дифракционная задача обладает свойством симметрии, что позволяет осуществлять первичное самотестирование получаемых результатов.

В ходе численной реализации вычислялись безразмерные контурные напряжения $\sigma_\beta = \tau_s / \mu$. Точность вычислений проверялась путем сравнения результатов при различных значениях N . Проводилось также сравнение полученных результатов с результатами, приведенными в [4] для случая одиночного отверстия и системы эллиптических отверстий.

Применение метода параллельных вычислений, проведенного на кластере «Инпарк-256», позволило исследовать сходимость до 10^{-10} порядка. Подтверждено, что сходимость решения практически не зависит от числа отражателей. Насыщение решетки обнаруживается уже при 10 объектах.

В работе проводились вычисления контурных напряжений σ_β вдоль контуров центрального L_0 и крайнего L_k отверстий (рис. 2) в случае решетки, состоящей из нечетного числа отверстий ($p=k$). Отсчет угла β ведется от нуля (теневая точка) до π (лобовая точка) для центрального отверстия (учитывается симметрия в случае нормального распределения волны сдвига) и от 0 до 2π – для крайних отверстий (в силу симметрии распределения напряжений на контурах L_k и L_{-k} зеркальны). Рассматривается случай ромбов, вытянутых навстречу набегающей волне, при этом $b/a=2.5$.

На рис. 4 приведены распределения σ_β вдоль контура центрального отверстия L_0 в случае решетки, состоящей из трех ромбов. Воздействие – волна из бесконечности. Значения безразмерного волнового числа $\gamma_2 a$ равны 1.5 (а) и 3 (б). Кривая 1 показывает распределение напряжений для центрального отверстия в случае решетки, где $d=0.5a$. Кривая 2 – для решетки с $d=2a$. Результаты показывают, что чем ближе отверстия друг к другу, тем выше

контурные напряжения. Если в теневой ($\beta=0$) и лобовой ($\beta=\pi$) точках $\sigma_\beta=0$, то в зоне соскальзывания с увеличением $\gamma_2 a$ число локальных максимумов σ_β также увеличивается, причем растет и максимальное значение σ_β . Такой вывод полностью совпадает с результатами работы [4]

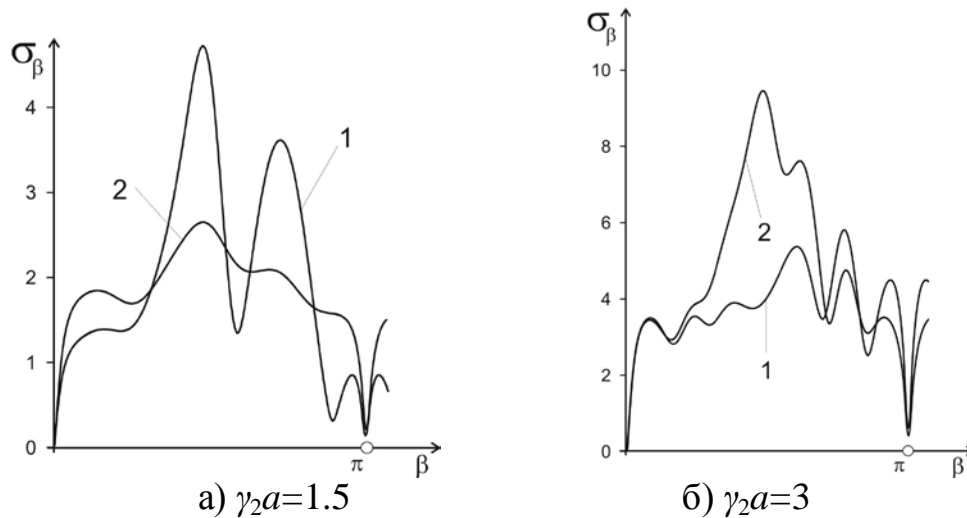


Рис. 4

В связи с тем, что метод интегральных уравнений не позволяет находить решение в произвольных точках контура, а лишь в узлах полиномов, для высокоточного определения значения максимума касательного напряжения, а также и значения угла в радианах, применим алгоритм последовательных приближений смещений точек коллокации контура.

Для приближенного определения отрезка контура, на котором находится максимум, использован метод сплайнов. Так как искомая зависимость контурных напряжений имеет не более, чем параболическую кривизну, для снижения погрешности выбирался квадратичный сплайн. После нахождения начального приближения значения максимума напряжения, вычислялось и начальное приближение отрезка контура, где дислоцировано это значение.

На каждой итерации для вычислений значений функции применялась известная процедура метода «золотого сечения» деления отрезка [7] в точках x_1 и x_2 . Тут в каждой итерации требуется только одно новое вычисление значения функции. Это приводит к ускорению по сравнению с методом половинного деления. В этом методе длины последовательных отрезков $(x_1; b)$ должны давать одно и то же число r :

$$\frac{b-a}{b-x_1} = \frac{b-x_1}{x_1-a} = r.$$

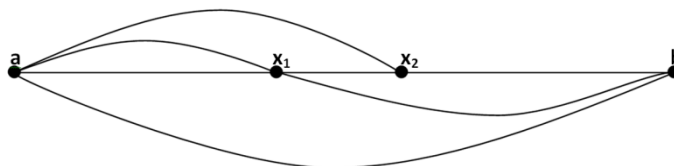


Рис. 5

При этом отрезок $[a, b]$ равен сумме отрезков $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$, откуда легко получить, что число r удовлетворяет уравнению $r^2 = r + 1$, т.е. $r = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$. Таким образом: $x_1 = b - \frac{(b-a)}{r}$, $x_2 = a + \frac{(b-a)}{r}$. В силу свойства «золотого сечения» необходимо искать лишь одну новую точку. Процедура продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность: $\varepsilon > |b - a|$.

Разработанная схема численного эксперимента позволила сформировать уникальную таблицу высокоточных значений (до 10^{-10}) максимумов касательных напряжений и соответствующих угловых координат на контуре эллиптического или ромбического центрального или крайних отверстий (в системе от 3

до 9 об'єктів), розположених в нескінченній ізотропній епругій середі. Воздействие - волна із нескінченності або розположений поблизу точечний джерело гармонічних SH-волн для любых геометрических соотношений отворстий і більшості волнових чисел.

По мнению авторов, для определения высокоточных значений решений интегральных уравнений на контуре описанный метод применен впервые. И такая таблица также сформирована впервые.

Тут в Таблице 1 приводится фрагмент этого результата для волны из нескінченності і точечного джерела, действующей на систему из трех эллиптических или ромбических отворстий с соотношением осей $b/a=2.5$ и волновыми числами $\gamma_2 a$ равными 1, 7 и 2.5 соответственно.

Таблица 1. Высокоточные значения максимумов касательных напряжений

Источник	Тип контура	$\gamma_2 a$	Расположение отворстия	Угол β в радианах	Максимум σ_β
Волна	Ромбик	1,7	Центральное	1,5241661202	2,8519959464
Волна	Ромбик	1,7	Крайнее справа	4,7330332830	2,7685470486
Точ. источ.	Ромбик	1,7	Центральное	0,0953579509	1,2697288402
Точ. источ.	Ромбик	1,7	Крайнее справа	3,1676492946	0,2446962768
Волна	Ромбик	2,5	Центральное	3,5880972937	4,2768939823
Волна	Ромбик	2,5	Крайнее справа	1,5641853954	4,3471409312
Точ. источ.	Эллипс	2,5	Центральное	0,2433410444	0,5857393657
Точ. источ.	Эллипс	2,5	Крайнее справа	6,2449639214	0,4036738759
Точ. источ.	Ромбик	2,5	Центральное	0,1031154078	1,5085150911
Точ. источ.	Ромбик	2,5	Крайнее справа	6,2781079856	0,5777780860

7 Выводы

Получение точных величин резонансных максимумов контурных напряжений, а также точных координат дислокации резонансных максимумов, позволит избежать разрушений конструкций, работающих в условиях динамических нагрузок. Все это требует использования увеличенного числа вариантов исходных данных. Сочетание метода интегральных уравнений, позволяющего на единицу снизить размерность задачи, а также значительная экономия времени вычислений за счет распараллеливания вычислительных процедур, приводит к существенному увеличению эффективности предложенного алгоритма.

Список литературы

1. Вертайм И.И., Терпигуров В.Н. Параллельные технологии вычислений в механике сплошных сред и МДТТ.: Учебное пособие. – Пермь, 2007. – 84 с.
2. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – К.: Наук. думка, 1984. – 344 с.
3. Фильштинский Л.А. Дифракция упругих волн на трещинах, отворстиях, включениях в изотропной среде //Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1991. - №4. – С. 119 -127.
4. Назаренко А.М., Панченко Б.Е. Схема параллельных вычислений в задачах дифракции волн сдвига на системе отворстий в нескінченній епругій середі //Проблемы программирования. – 2010. – № 2-3, С. 604-610
5. Химич А.Н., Молчанов И.Н., Попов А.В. Численное програамное обеспечение интеллектуального MIMD-компьютера «Инпарк» - К: Наук. думка. – 2007. - с. 220
6. Гузь А.Н., Немиш Ю.Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. Киев, - 1989.- 352 с.
7. Максимов Ю.А., Филиповская Е.А. Алгоритмы решения задач нелинейного программирования — М.: МИФИ, - 1982, 421 с